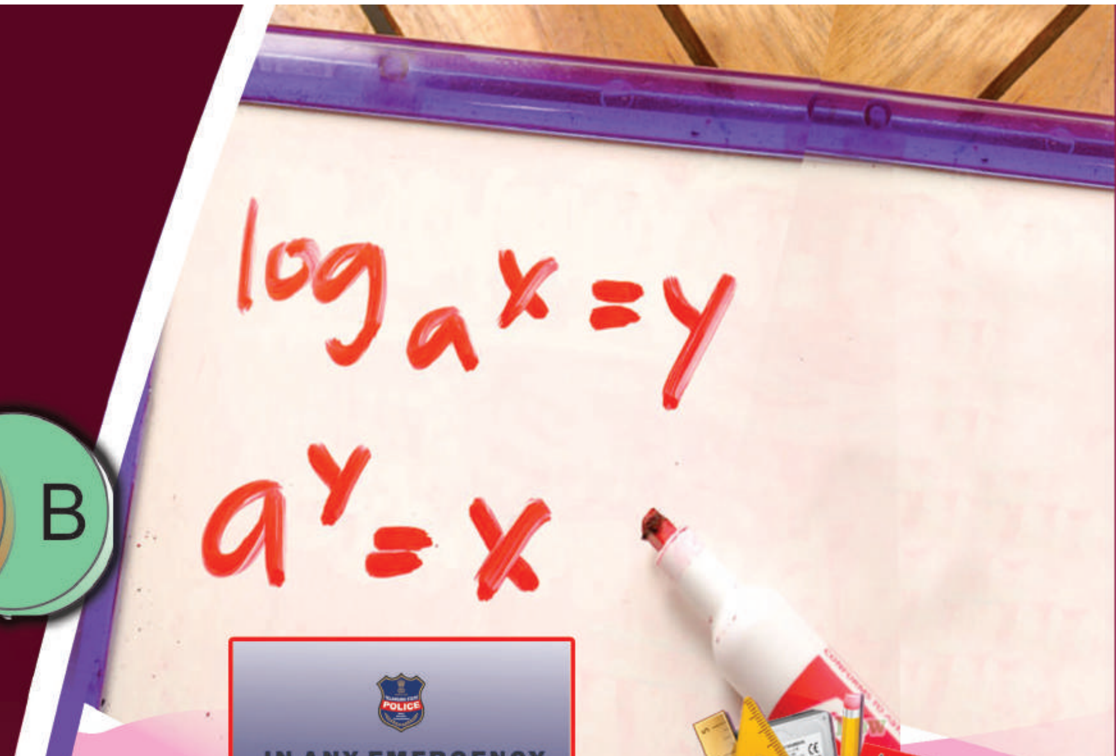
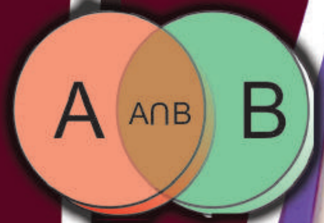




ರಾಷ್ಟ್ರ ವಿದ್ಯಾ, ಪರಿಶೋಧನೆ, ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಸ್ಥೆ
ತೆಲಂಗಾಣ, ಹೈದರಾಬಾದು.

**ತೆಲಂಗಾಣ ಸರಕಾರ**

**ಮಹಿಳಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಶಿಶು ಕಲ್ಯಾಣ ಶಾಖೆ - ಚೈಲ್ಡ್‌ಲೈನ್ ಫೌಂಡೇಷನ್**

ಶಾಲೆಯಲ್ಲಾಗಲಿ, ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಾಗಲಿ ವೇದನೆಗೆ ಗುರಿ ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ

ಆಪತ್ತಿನಲ್ಲಿ, ಕಷ್ಟದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು

CHILD LINE 1098 NIGHT & DAY

24 HOUR NATIONAL HELPLINE

ಮಕ್ಕಳಿಂದ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿಸುತ್ತಿರುವ ಅವರನ್ನು ಶಾಲೆಗೆ ಕಳಿಸದೆ ಬೇರೆ ಕೆಲಸಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ

ಕುಟುಂಬದ ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ ಬಂಧುಗಳಾಗಲಿ ಇಬ್ಬಂದಿಕರವಾಗಿ ಅಸಭ್ಯವಾಗಿ ವರ್ತಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ

1098 (ಹತ್ತು - ಒಂಬತ್ತು - ಎಂಟು) ಉಚಿತ ಟೆಲಿಫೋನ್ ಸೇವಾ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಫೋನ್ ಮಾಡಿರಿ.

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ

ಗಣಿತ

ತರಗತಿ -X

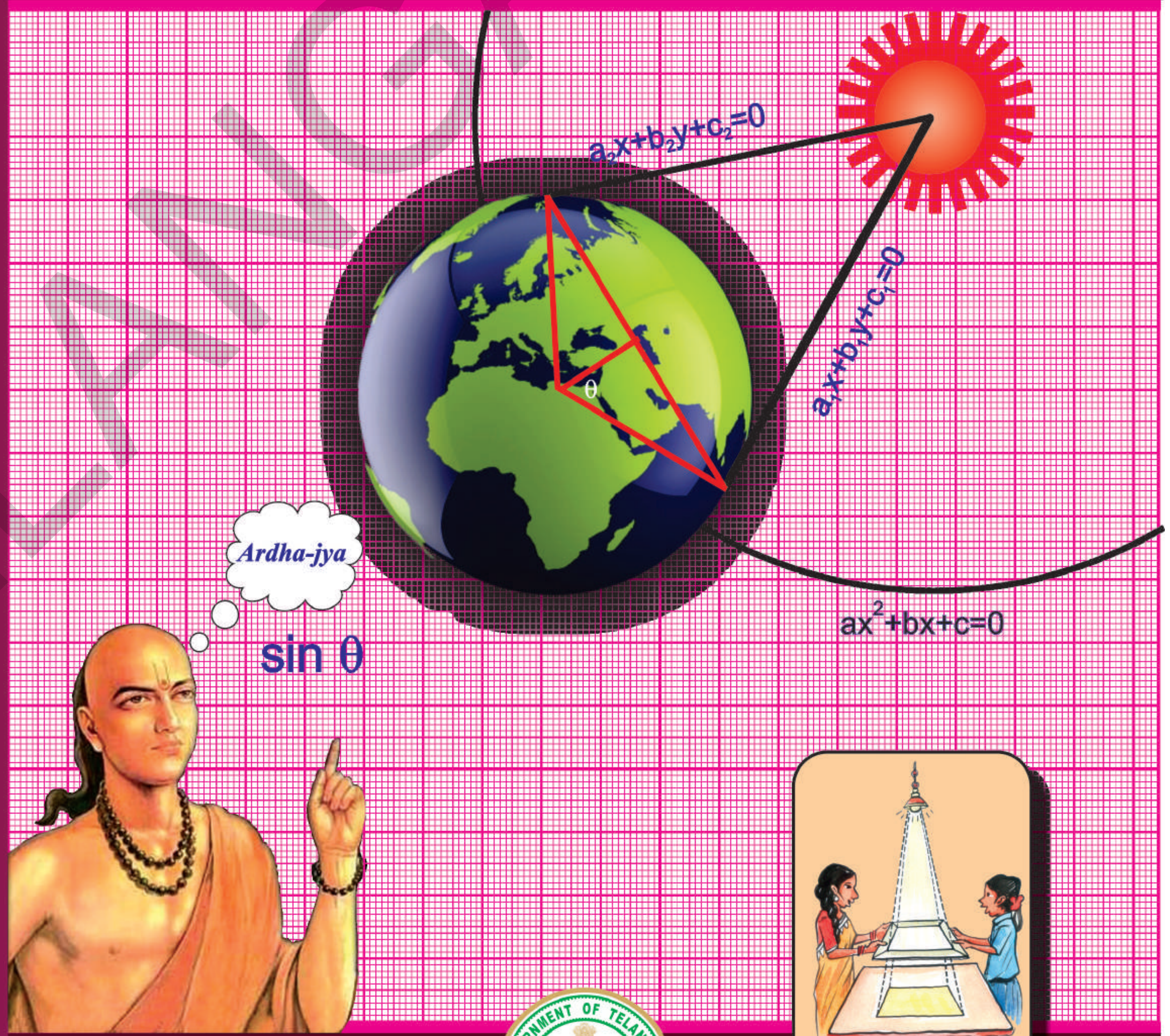
FREE

# ಗಣಿತ

MATHEMATICS

Class X

ತರಗತಿ -X




ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರ ಪ್ರಚುರಣೆ,ಹೈದರಾಬಾದು.

ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ

# ಮಕ್ಕಳೇ! ನಿಮಗಾಗಿಯೇ ಈ ಸೂಚನೆಗಳು...

- ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಭಾವನೆ ತಿಳುವಳಿಕೆಗಾಗಿ ಸಂದರ್ಭ ಇಲ್ಲವೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಆಟಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಿತ್ರಗಳು/ಪಟಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪಟದೊಂದಿಗೆ/ ಚಿತ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ ಓದಿ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಬರುವ ಅನುಮಾನಗಳನ್ನು ತಕ್ಷಣವೇ ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು ಕೇಳಿ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಭಾವನೆ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಇವು ಮಾಡಿರಿ ಯಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಬಿಡಿಸಲು ಕಷ್ಟವಾದರೆ ಮಾದರಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೇ ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳಮೂಲಕ ಮತ್ತೆ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು.
- ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಶೀರ್ಷಿಕೆ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ನಿಮ್ಮ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಚುರುಕುಗೊಳ್ಳಿಸಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ನಿಮಗೆ ಆಲೋಚನಾ ನೈಪುಣ್ಯಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸ್ವತಃವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗದಿದ್ದಾಗ ಸಹಪಾಠಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲವೇ ಶಿಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಇವು ಮಾಡಿರಿ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಮಕ್ಷಮದಲ್ಲಿ ಯೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಪ್ಪದೇ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.
- ಆಲೋಚಿಸಿರಿ- ಚರ್ಚಿಸಿರಿ ನಲ್ಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ನಿಮ್ಮ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಆಳವಾಗಿ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಪಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಾ, ಪ್ರಶ್ನಿಸುತ್ತಾ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ನೀವು ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಎಲ್ಲಾ ಭಾವನೆಗಳಗೆ ಸಂಬಂಧಸಿದವು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ, ಇವುಗಳನ್ನು ನೀವು ಸ್ವತಃ ಮನೆಕೆಲಸವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ವಿರಾಮ ಸಮಯದಲ್ಲಾಗಲೀ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಗೈಡ್‌ಗಳಿಂದಾಗಲೀ, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರ ಪುಸ್ತಕಗಳಿಂದಾಗಲೀ ಕಾಪಿ ಮಾಡಬಾರದು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವರೋ ಅಲ್ಲಿ ನೀವು ಸಮೂಹಗಳಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇವುಗಳ ವರದಿಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಿಗತವಾಗಿ ಬರೆದು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು, ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು , ನಿಮ್ಮ ಪ್ರತಿಸ್ಪಂದನೆಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆಯಬೇಕು.
- ನೀವು ಯಾವ ದಿನದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದಿನವೇ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರ ಹತ್ತಿರ ತಪ್ಪದೇ ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನಂತರ ಭಾರ ಹೆಚ್ಚಾದಂತಾಗುತ್ತದೆ.
- ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನೀವು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಶೇಖರಣೆಮಾಡಿ ಸ್ವಂತವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಸಹಪಾಠಿಗಳಿಗೆ ತೋರಿಸಿರಿ. ಎಲ್ಲರೂ ಸೇರಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
- ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಆಟಗಳು, ಪಜಿಲ್ಸ್, ಆಸಕ್ತಿಕರವಾದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಶೇಖರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.
- ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೂಲಕ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ತರಗತಿ ಕೋಣೆಗೇ ಪರಿಮಿತ ಮಾಡದೇ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ವಿವಿಧ ಸಂಧರ್ಭಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವುದು, ಉಪಯೋಗಿಸುವಂತಹವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.
- ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನೀವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆ, ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದು, ಸಾಧನೆಗಳು ಮಾಡುವುದು, ಗಣಿತ ಬಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು, ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವಗಳಂತಹ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಮೇಲಿನ ಗಣಿತ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಎದುರಾದರೆ ಶಿಕ್ಷಕರ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ , ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆಗೆ ವಿವಿಧ ಪರಿಷ್ಕಾರ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಆಧಾರ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಓದುವುದು, ಇಂಟರ್ನೆಟ್ ಪರಿಶೀಲನೆ, ವಿಷಯ ನಿಪುಣರು/ಶಿಕ್ಷಕರು/ಸಹ ಪಾಠಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವುದು ಮಾಡಬೇಕು.
- ಪ್ರತಿ ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳು ನಿಮ್ಮ ವಿಮರ್ಶಾತ್ಮಕ ಆಲೋಚನೆಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ನೀವು ತಪ್ಪದೇ ಬಿಡಸಬೇಕು. ಇವು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರದಿದ್ದರೂ, ರಾಷ್ಟ್ರಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಮನೋಭಾವವನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.
- ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಗಣಿತ ಮೊಡಲಿಂಗ್ ಅಧ್ಯಾಯ ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯಾಪಾರ, ವ್ಯವಸಾಯ, ಸ್ಟಾಕ್ ಮಾರ್ಕೆಟ್ ಮೊದಲಾದ ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸಲು , ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಗಣಿತಾಂಶಗಳು ವಿವಿಧ ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೇಗೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆಯೋ ನೀವು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಸಹ ನೀವು ತಪ್ಪದೇ ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕು.
- ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸಿಲಬಸ್, ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇವು ನೀವು ಏನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಏನುಸಾಧಿಸಬೇಕು ಎಂಬುವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ನೀವು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸಾಧಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಮುಂದಿದ್ದೀರೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಇವು ಉಪಯೋಗಪಡುತ್ತವೆ.

## ಸಂಕೇತಗಳು ಮತ್ತು ಗುರ್ತುಗಳು -ಪಾಠಶಾಲೆ ಗಣಿತ

| ಸಂಕೇತ/ಗುರ್ತುಗಳು | ಓದುವ ವಿಧಾನ | ಗಣಿತ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಥ |
|---|---|---|
| $\pm$ | ಪ್ಲಸ್ ಆರ್ ಮೈನಸ್ | ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ |
| $\neq$ | ನಾಟ್ ಈಕ್ವಲ್ ಟು | ಅಸಮತೆ |
| $\therefore$ | ಥೇರ್‌ಫೋರ್ | ಅದಕೋಸ್ಕರ |
| $\infty$ | ಇನ್‌ಫಿನಿಟ್ | ಅಸಂಖ್ಯಾತ, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡದವು |
| $\sim$ | ಈಜ್ ಸಿಮಿಲರ್ ಟು | ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವೇ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಚಿತ್ರಗಳು |
| $\cong$ | ಈಜ್ ಕಾಂಗ್ರುಯಂಟ್ ಟು | ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು |
| $\equiv$ | ಈಜ್ ಐಡೆಂಟಿಕಲ್ಲೀ ಈಕ್ವಲ್ ಟು | ಸಾರೂಪ್ಯತೆ ಹೇಳಿಕೆಗಳು |
| $\forall$ | ಫರ್ ಆಲ್ | ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಮಾಪಕ |
| $\sqrt{\ }$ | ಸ್ಕ್ವೈರ್ ರೂಟ್ ಆಫ್ | ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ |
| $\sqrt[3]{\ }$ | ಕ್ಯೂಬ್ ರೂಟ್ ಆಫ್ | ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಮೂಲ |
| $\cup$ | ಕಪ್ ಆಫ್ | ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ |
| $\cap$ | ಕ್ಯಾಪ್ ಆಫ್ | ಗಣಗಳ ಛೇದನ |
| $\phi$ | ಪೈ | ಶೂನ್ಯ ಗಣದ ಗುರ್ತು |
| % | ಪರ್‌ಸೆಂಟ್ ಆಫ್ | ಪ್ರತಿ ನೂರಕ್ಕೆ |
| $^\circ$ | ಡಿಗ್ರೀ | ಕೋನ ಪರಿಮಾಣ |
| $\Delta$ | ಡೆಲ್ಟಾ / ಟ್ರೈಯಾಂಗಿಲ್ | ಗಣಗಳ ಸಮಮಿತಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ/ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರ್ತು |
| $\in$ | ಬಿಲಾಂಗ್ಸ್ ಟು | ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆ |
| $\leftrightarrow$ | ಈಕ್ವಲೆಂಟ್ ಟು | ಒಂದು ಒಂದು ಸಂಬಂಧ |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | ಆಲ್ಫಾ, ಬೀಟಾ, ಗಾಮಾ | ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಬಳಸುವ ಗುರ್ತುಗಳು (ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರಗಳು) |
| $\mu$ | ಮ್ಯೂ | ವಿಶ್ವಗಣದ ಸಂಕೇತ |
| $\pi$ | ಪೈ | ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, ಇದರ ಬೆಲೆ 3.14159...=22/7 ಸುಮಾರು |
| $\Sigma$ | ಸಿಗ್ಮಾ | ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಅಥವಾ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತ |
| $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ | ಸೈನ್ ಟೀಟಾ, ಕಾಸ್ ಟೀಟಾ, ಟ್ಯಾನ್ ಟೀಟಾ | ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು |
| $\overline{x}$ | ಬಾರ್ | ಸರಾಸರಿ |
| $\log_a x$ | ಲಾಗ್ ಎಕ್ಸ್ ಟು ದ ಬೇಸ್ ಎ | ಲಘುಗಣಕದ ಉತ್ಪನ್ನ |
| (a, b) | ಪಾಯಿಂಟ್ a,b | a,b ಗಳ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ |
| $\|x\|$ | ಮಾಡ್ ಎಕ್ಸ್ | ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ |
| P(x) | ಪಿ ಆಫ್ ಎಕ್ಸ್ | ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ |
| P(E) | ಪಿ ಆಫ್ ಇ | ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ |
| $\because$ | ಸಿನ್ಸ್ | ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದು |
| ` | ರೂಪೀ | ಭಾರತ ದ್ರವ್ಯಮಾನ ಗುರ್ತು |
| $\parallel$ | ಈಜ್‌ಪ್ಯಾರಲಲ್ ಟು | ರೇಖೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ಗುಣಲಕ್ಷಣ |
| $\perp$ | ಈಜ್ ಪರ್‌ಪೆಂಡಿಕ್ಯುಲರ್ ಟು | ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಡಿಗ್ರಿಗಳು (ಎರಡು ರೇಖಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು) |
| { } | ಫ್ಲವರ್ ಬ್ರಾಕೆಟ್ | ಗಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಆವರಣ |
| $\overset{\frown}{PQ}$ | ಆರ್ಕ್‌ಪಿಕ್ಯೂ | ವೃತ್ತ ಕಂಸ |
| $a^2$ | ಎ ಸ್ಕ್ವೆಯರ್ | ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ |
| $\angle$ | ಯಾಂಗಿಲ್ | ಕೋನದ ಗುರ್ತು |
| $\theta$ | ಟೀಟಾ | ಕೋನದ ಅಳತೆ |

# MATHEMATICS
## CLASS - X
## (KANNADA MEDIUM)

## ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಚುರಣಾ ಸಮಿತಿ

ಪ್ರಧಾನ ನಿರ್ವಹಣಾಧಿಕಾರಿ : **ಶ್ರೀ ಜಿ. ಗೋಪಾಲ್‌ರೆಡ್ಡಿ**
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.
ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರಧಾನ ವ್ಯವಹಾರ ನಿರ್ವಾಹಕರು : **ಶ್ರೀ ಬಿ.ಸುಧಾಕರ್**
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಮುದ್ರಣಾಲಯ,
ಹೈದರಾಬಾದ್.

ಪ್ರಭಾರಿ ನಿರ್ವಹಣಾಧಿಕಾರಿ : **ಶ್ರೀ ಡಾ|| ಎನ್.ಉಪೇಂದರ್ ರೆಡ್ಡಿ** ಪ್ರೊಫೆಸರ್,
ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ವಿಭಾಗ,
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.,
ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಚೇರ್ ಪರ್ಸನ್, ಗಣಿತ ಆಧಾರ ಪತ್ರ, ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸಮಿತಿ**

**ಪ್ರೊ.ವಿ.ಕನ್ನನ್**
ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ,
ಹೈದರಾಬಾದ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹೈದರಾಬಾದು.

**ಪ್ರಧಾನ ಸಲಹೆಗಾರರು**

**ಶ್ರೀ ಚುಕ್ಕಾ ರಾಮಯ್ಯ**
ಶಿಕ್ಷಣ ತಜ್ಞ
ಹೈದರಾಬಾದು

**ಡಾ|| ಹೆಚ್.ಕೆ.ದಿವಾನ್**
ಶಿಕ್ಷಣ ಸಲಹೆಗಾರರು, ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ,
ಉದಯಾಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

**ಪ್ರಚುರಣೆ :**

**ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರ, ಹೈದರಾಬಾದು**

*First Published 2014*
*New Impressions 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020*



This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

**ತೆಲಂಗಾಣ ಸರ್ಕಾರದಿಂದ ಉಚಿತ ವಿತರಣೆ 2020-21**



*Printed in India*
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

# ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಸಮಿತಿ

## ಸದಸ್ಯರು

**ಶ್ರೀ ತಾತ ವೆಂಕಟ ರಾಮ್ ಕುಮಾರ್**
H.M., ZPHS, ಎಸ್,ಮುಲುಮುಡಿ, SPSR ನೆಲ್ಲೂರು.

**ಶ್ರೀ ಸೋಮ ಪ್ರಸಾದ್ ಬಾಬು**
PGT. APTWRS,.ಚಂದ್ರಶೇಖರಪುರಂ, SPSR ನೆಲ್ಲೂರು

**ಶ್ರೀ ಜಿ. ಅನಂತ ರೆಡ್ಡಿ**
ನಿವೃತ್ತ ಮುಖ್ಯ ಗುರುಗಳು ,ರಂಗಾರೆಡ್ಡಿ

**ಡಾ.ಪೂಂಡ್ಲ ರಮೇಶ್**
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು,ಸರ್ಕಾರಿ IASE, SPSR ನೆಲ್ಲೂರು.

**ಶ್ರೀ ಕೋಮಂದೂರು ಶ್ರೀಧರಾಚಾರ್ಯುಲು**
SA, ZPHS, ರಂಗಾಯಪಲ್ಲಿ, ಮೆದಕ್

**ಶ್ರೀ ಕಂದಾಲ ರಾಮಯ್ಯ**
SA, ZPHS,ಸಂದೇವ್‌ಸೇಟ್, ವರಂಗಲ್

**ಶ್ರೀ ಗೊಟ್ಟುಮುಕ್ಕಲ ಬಿ.ಎಸ್.ಎನ್.ರಾಜು**
SA,ಮುನ್ಸಿಪಲ್ ಹೈಸ್ಕೂಲ್,ಕಸ್ಪ,ವಿಜಯನಗರಂ.

**ಶ್ರೀ ಪಡಾಲ ಸುರೇಶ್ ಕುಮಾರ್**
SA,GHS, ವಿಜಯ್‌ನಗರ್ ಕಾಲೋನಿ,ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಶ್ರೀ ಪಿ.ಡಿ.ಎಲ್.ಗಣಪತಿ ಶರ್ಮ**
SA,GHS,ಜಮಿಸ್ತಾನ್‌ಪುರ್,ಮನಿಕೇಶ್ವರ್ ನಗರ್,ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಶ್ರೀ ಸರ್ದಾರ್ ಧರ್ಮೇಂದರ್ ಸಿಂಗ್**
SA, ZPHS, ದನ್ನೂರ್ (B), ಆದಿಲಾಬಾದ್

**ಶ್ರೀ ನಾಗುಲ ರವಿ**
SA, ZPHS, ಲೋಕೇಶ್ವರಂ,ಆದಿಲಾಬಾದ್

**ಶ್ರೀ ಕಾಕುಳವರಂ ರಾಜೇಂದ್ರ ರೆಡ್ಡಿ**
ಕೋ-ಆರ್ಡಿನೇಟರ್, SCERT, AP, ಹೈದರಾಬಾದ್.

## ಮುಖ್ಯ ಸಂಪಾದಕರು

**ಡಾ|| ಹೆಚ್.ಕೆ.ದಿವಾನ್**
ಶಿಕ್ಷಣ ಸಲಹೆಗಾರರು, ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ,ಉದಯಾಪೂರ್, ರಾಜಸ್ಥಾನ್.

## ಸಂಪಾದಕರು

**ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ವಿ.ಶಿವ ರಾಂಪ್ರಸಾದ್**
ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್,ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ ,
ಉಸ್ಮಾನಿಯಾವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ,ಹೈದರಾಬಾದ್

**ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಎನ್. ಸಿ.ಹೆಚ್. ಪಟ್ಟಾಭಿರಾಮಾಚಾರ್ಯುಲು**
ನಿವೃತ್ತ ಪ್ರೊಫೆಸರ್,ಎನ್ಇ.ಟಿ.,ವರಂಗಲ್.

**ಶ್ರೀಎ. ಪದ್ಮನಾಭಂ**
ನಿವೃತ್ತ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗಾಧಿಪತಿ
ಮಹಾರಾಣಿ ಕಾಲೇಜ್, ಪೆದ್ದಾಪುರಂ,ತೂರ್ಪುಗೋದಾವರಿ

**ಡಾ. ಜಿ. ಸೂರ್ಯನಾರಾಯಣ ಮೂರ್ತಿ**
ನಿವೃತ್ತ ರೀಡರ್,ರಾಜಾ. ಆರ್. ಎಸ್. ಆರ್. ಕೆ. ರಂಗಾರಾವು ಕಾಲೇಜ್
ಬೊಬ್ಬಿಲಿ, ವಿಜಯನಗರಂ

## ಸಮನ್ವಯಾಧಿಕಾರಿಗಳು

**ಶ್ರೀ ಕೆ.ರಾಜೇಂದ್ರ ರೆಡ್ಡಿ**
ಕೋ-ಆರ್ಡಿನೇಟರ್, SCERT, AP, ಹೈದರಾಬಾದ್.

**ಶ್ರೀ ಕೆ.ನಾರಾಯಣ ರೆಡ್ಡಿ**
ಉಪನ್ಯಾಸಕರು, SCERT, AP, ಹೈದರಾಬಾದ್.

## ಕನ್ನಡ ಅನುವಾದಕರು

**ಶ್ರೀ ಟಿ.ಎಸ್. ಹನುಮಂತರಾಯಪ್ಪ**
SA, ZPHS, ಡಿ. ಹಿರೇಹಾಳ್, ಅನಂತಪುರಂ

**ಶ್ರೀ ಡಿ. ಪ್ರಭಾಕರ**
SA, ZPHS, ಹೆಚ್. ಸಿದ್ದಾಪುರಂ, ಅನಂತಪುರಂ

**ಶ್ರೀಮತಿ ಭಾಗ್ಯಮ್ಮ**
SA, ZPHS, ಕೌತಾಳಂ. ಕರ್ನೂಲ್

**ಶ್ರೀಮತಿ ಜೆ . ಜಯಶ್ರೀ**
SA, ZPHS, ಡಿ. ಹಿರೇಹಾಳ್, ಅನಂತಪುರಂ

**ಶ್ರೀ ಕೆ.ಸಿದ್ದಪ್ಪ**
SA, ZPHS, ಕೌತಾಳಂ. ಕರ್ನೂಲ್

**ಶ್ರೀ ಸಿ. ಎನ್. ಪದ್ಮನಾಭರಾವ್**
SA, Z PHS, ಡಿ. ಹಿರೇಹಾಳ್, ಅನಂತಪುರಂ

**ಶ್ರೀ ಸಿ. ನಾಗರಾಜ.**,SA, ZPHS, ಕೃಷ್ಣ,ಮಹಬೂಬನಗರ.

**ಶ್ರೀ ಸೋಮನಾಥರೆಡ್ಡಿ.**, ZPHS, ಕೃಷ್ಣ, ಮಹಬೂಬನಗರ.

## ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಹಾಯ ಸಮಿತಿ ಸದಸ್ಯರು

**ಶ್ರೀ ಹನೀಷ್ ಪಾಲಿವಲ್**  **ಕುಮಾರಿ ಪ್ರೀತಿ ಮಿಶ್ರ**  **ಶ್ರೀಮತಿ ಸ್ನೇಹ ಬಾಲಜೋಶಿ**  **ಕುಮಾರಿ ತಾನ್ಯ ಸಕ್ಸೇನಾ**
ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಎಡ್ಯುಕೇಷನ್ ರಿಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್, ಉದಯ್‌ಪೂರ್

**ಕುಮಾರಿ ಎಂ. ಅರ್ಚನಾ**
ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ, ಹೈದರಾಬಾದ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹೈದರಾಬಾದು.

## ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸ ಸಮಿತಿ

**ಶ್ರೀ ಪ್ರಶಾಂತ ಸೋನಿ**  **ಶ್ರೀ ಎಸ್. ಎಂ. ಇಕ್ರಮ್**  **ಶ್ರೀ ಭವಾನಿ ಶಂಕರ್**
ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಎಡ್ಯುಕೇಷನ್ ರಿಸೋರ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್, ಉದಯ್‌ಪೂರ್

# ಮುನ್ನುಡಿ

ಮಾನವನ ವಿಕಾಸಕ್ಕೆ, ಸಾಧಿಕಾರತೆಗೆ, ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧವಾದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ವಿದ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮೂಲಾಧಾರ. ವಿದ್ಯೆಗಿರುವ ಈ ಅದ್ಭುತವಾದ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮುನ್ನಡೆಯುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಜಗಳು 'ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ವಿದ್ಯೆ'ಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಗುಣಾತ್ಮಕ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಮನಸ್ತತ್ವದಿಂದ ಮುಂದೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಲು ಸೆಕೆಂಡರಿ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ಸಹ ಸಾರ್ವಜನೀಯಗೊಳಿಸುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸ್ಥಾಯಿವರೆಗೂ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಕಲಿತಕೊಂಡ ಗಣಿತ ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಿಯಮಬದ್ಧ ಗಣಿತವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಸ್ಥಾಯಿ ಸಹಾಯಪಡುತ್ತದೆ. ಗಣಿತದ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಬದ್ಧವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದು, ಪ್ರಮೇಯಗಳ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಯಂತವುಗಳನ್ನು ಈ ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವೆಂಬುದು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಬೋಧನಾ ವಿಷಯ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿ ವಿಷಯದೊಂದಿಗೆ ಅವಿನಾಭಾವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಕಾರಣಗಳಿಂದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಮಾನಸಿಕ ಸ್ಥೈರ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವರ ಜೀವನದ ಅನುಭವಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ, ಮುಂದಿನ ದೊಡ್ಡ ತರಗತಿಗಳ ಮುಂದುವರೆಸಲು ಪ್ರೇರಣೆ ಹೊಂದಿ ಉನ್ನತ ವಿದ್ಯಾವಂತರಾಗಿ ಒಳ್ಳೆಯ ಪೌರರಾಗಿ ಬದಲಾಗಲು ಕೃಷಿ ಪಡಬೇಕು.

ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಸಂತೋಷದಿಂದ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವುದಲ್ಲದೇ, ಅವರ ಜೀವನದ ಆನುಭವಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವದಲ್ಲಿನ ಮೂಲ ಅಂಶಗಳು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾನು ಪ್ರಭಲವಾಗಿ ನಂಬಿದ್ದೇನೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತವನ್ನು ಅಂಕಗಳ ಸಾಧನೆಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಿರುವ ಅಮೂಲ್ಯ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಬೋಧನಾ ಅಭ್ಯಸನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಭಾಗವಾಗಿ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲೂ, ಎಲ್ಲಾ ಮಟ್ಟದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಲುದಾರರಾಗುವಂತೆ ಶ್ರಮವಹಿಸಬೇಕು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಮೂಡಿಸಿ, ಆವರಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸ ಬೆಳೆಯುವಂತೆ ಬೋಧನೆಯು ಮುಂದುವರೆದಲ್ಲಿ ಅದು ಅವರ ಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಗುರಿಸಾಧನೆಗೆ ದಾರಿ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪಾಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯ ಕಾಯ್ದೆ (SCF - 2011) ಯ ವಿಶಾಲ ಮನಸ್ತತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದ ಗಣಿತ ಆಧಾರ ಪತ್ರದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವು ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಸಹಕರಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಆಕರ್ಷಣೀಯವಾಗಿ, ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಸರಿ ಹೊಂದಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವಿಶ್ರಾಂತ ಶ್ರಮವಹಿಸಿದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಂಡಳಿ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ, ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರೂಪಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಾಗಿಗಳಾದ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಿಗೆ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ, ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಇಲಾಖೆಯು ಅಭಿನಂದಿಸುತ್ತದೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಇಲಾಖೆಯ ಪರವಾಗಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಜಿಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾ ಶಾಖಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಮಂಡಲ ಶಿಕ್ಷಣಾಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ, ಪಾಠ ಶಾಲೆಯ ಮುಖ್ಯೋಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳಿಗೆ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ನಿಂತು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದ ಕಮೀಷನರ್ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪಾಠಶಾಲೆ ವಿದ್ಯೆ, ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶರವರಿಗೂ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾಭವನ್ ಸೊಸೈಟಿ ಉದಯಪುರ, ರಾಜಾಸ್ಥಾನರವರಿಗೂ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಮುಂಬರುವ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತಷ್ಟು ಮೌಲ್ಯಧಾರಿತವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಪಡೆಯಲು ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲರ ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳು ನಿಮ್ಮಿಂದ ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

**ಸ್ಥಳ : ಹೈದರಾಬಾದು** — **ಸಂಚಾಲಕರು**

**ದಿನಾಂಕ : 17 ಅಕ್ಟೋಬರ್ 2013** — **ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಇಲಾಖೆ**

**ತೆಲಂಗಾಣ, ಹೈದರಾಬಾದು**

# ಪೀಠಿಕೆ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ (6, 7, 8), ಒಂದು ವರ್ಷದ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ (9)ನೇ ತರಗತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಈ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಭ್ಯಸನ ಮಾಡಲಿದ್ದಾರೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲಾ ಹಂತದ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲಿಸದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಮಾನಸಿಕ ಸ್ಥೈರ್ಯ, ಕಲಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವರ ಜೀವನದ ಅನುಭವಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ, ಜ್ಞಾನ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಸಹಾಯವಾಗುವಂತೆ ಶ್ರಮ ಪಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತವು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೂ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಾಠಶಾಲಾ ವಿದ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಹಂತದವರೆಗೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಒಂದು ಬೋಧನಾಂಶವನ್ನಾಗಿ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂದಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಗಣಿತದ ಕಲಿಕೆಯು ಇತರೆ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡಲೆಯಷ್ಟು ಕಠಿಣವೆಂದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ ಸಮಾಜದ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಗಣಿತವು ಒಂದು ಕಠಿಣ ವಿಷಯವೆಂದು ಜಗಜ್ಜನಿತವಾಗಿದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಒಂದು ಬೋಧನಾ ವಿಷಯವಲ್ಲದೇ, ಇತರೆ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಅವಿನಾಭಾವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಸರ್ವತೋಮುಖವಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸುವ ಒಂದು ಜ್ಞಾನ ವಿಭಾಗವೆಂದು ಗುರ್ತಿಸುವ ಜವಾಬ್ದಾರಿ ಬಹಳಷ್ಟಿದೆ. ಗಣಿತ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೇವಲ ಅಂಕಗಳಿಕೆಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ, ಪಾಠಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಗೆಹರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವರಂತೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಯವು ಮಾಯವಾಗಿ ಆಸಕ್ತಿ ಮೂಡುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಎದುರಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದುದು, ಗಣಿತದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಯ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕಠಿಣ ರೀತಿಯ ಗಣನೆಗಳು, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ನೆನಪಿನ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುವ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳು, ಅನುಕ್ರಮ ವಿಧಾನಗಳು, ಸುಲಭ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಪದ್ಧತಿಗಳು ಮತ್ತು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾದ ಸಾಧನೆಗಳಿಂದ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿದೆ. ಅನ್ವೇಷಣೆ, ಗ್ರಹಿಕೆ, ಹೊಸ ಆಲೋಚನೆಗಳು, ಗಣಿತದ ಭಾವನೆಗಳ ಸೃಷ್ಟಿಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುತ್ತಾ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಪದ್ಧತಿ ಇರುವುದೆನ್ನುವ ಸಂಕುಚಿತ ತಪ್ಪು ಗ್ರಹಿಕೆಯನ್ನು ಹೊರದೂಡಿ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದೆನ್ನುವ ದೃಢ ವಿಶ್ವಾಸವನ್ನು ಮೂಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆಗೆ ಹಲವು ಮಾರ್ಗಗಳು, ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಗಣಿತದ ಭಾವನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ ಮತ್ತು ತಾರ್ಕಿಕ ಚಿಂತನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಅಭ್ಯಸನದ ಮೂಲಕ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವಿಕೆ, ಸೂತ್ರೀಕರಿಸುವಿಕೆ ಮತ್ತು ವಿಧ ವಿಧ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನ ರೀತಿಯ ಸಾಧನಾ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಕೌಶಲ್ಯವನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ತರಬೇತಿ ನೀಡಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ, ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟು, ಚರ್ಚಿಸಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ, ತಾರ್ಕಿಕತೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ಸುಲಭ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ ನೂತನ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧರಾಗಬೇಕೆಂದು ಆಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತವೆಂದರೆ ಕೇವಲ ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ, ಇತರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅನ್ವೇಷಿಸಿದ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು, ಚರ್ಚಾ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಕ್ಕೆ ಬೆಳಸುವಂತೆ ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು. ಕಷ್ಟ ಬಿದ್ದು ಗಣಿತವನ್ನು ಕಲಿಯುವುದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಇಷ್ಟಪಟ್ಟು ಗಣಿತವನ್ನು ಕಲಿಯುವಂತೆ ಶ್ರಮ ಪಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರೌಢ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಂತದ ಕೊನೆಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಗಣಿತ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೈಜ ಜೀವಿತ ಸಂಘಟನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತವರಾಗುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ನೈಜ ಜೀವಿತ ಸಂಘಟನೆಗಳೆಲ್ಲಕ್ಕೂ ಗಣಿತದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾರೆವು. ಒಂದು ಅನುಷಂಗಿಕ (ನಿರ್ಬಂಧಿತ) ಹೇಳಿಕೆಯು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸುವರೋ ಆ ತಾರ್ಕಿಕ ಪದ್ಧತಿಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬರೆಯುವುದನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತಾರೆ.

ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶವು, ಪೀಠಿಕೆ ಮತ್ತು ಹತ್ತನೇ ತರಗತಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಗಣಿತಾನುಭವಗಳನ್ನು, ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಕರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು, ತಮ್ಮ ಅನುಭವಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧೀಕರಿಸಿ, ನಿರ್ಮಾಣಾತ್ಮಕ ಶ್ರಮದೊಂದಿಗೆ ಪುಷ್ಟೀಕರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಿಂತಲೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ಅನೇಕ ವಿಷಯ ಪರಿಣತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಅವರ ಅತ್ಯಮೂಲ್ಯ ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿ, ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆ ಹಾಗೂ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿಶೇಷ ಅನುಭವಿಗಳಾದ ರಚನೆಕಾರರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಶ್ರಮದ ಫಲವೇ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸದ್ವಿಮರ್ಶೆಗಳೊಂದಿಗೆ, ಸೂಚನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸುವ ಸರ್ವರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

*ಇಂತಿ*

**ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಂಡಲಿ, ಹೈದ್ರಾಬಾದು.**

# ಪರಿವಿಡಿ



| ಕ್ರ. ಸಂ | ಅಧ್ಯಾಯ | ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾದ ತಿಂಗಳು | ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|---|---|---|
| 01 | ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು | 15 | ಜೂನ್ | 1 - 27 |
| 02 | ಗಣಗಳು | 08 | ಜೂನ್ | 28 - 50 |
| 03 | ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು | 08 | ಜುಲೈ | 51 - 77 |
| 04 | ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗುಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ | 15 | ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ | 78 - 105 |
| 05 | ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು | 12 | ಅಕ್ಟೋಬರ್ | 106 - 129 |
| 06 | ಶ್ರೇಢಿಗಳು | 11 | ಜನವರಿ | 130 - 163 |
| 07 | ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ | 12 | ನವಂಬರ್ | 164 - 195 |
| 08 | ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು | 18 | ಜುಲೈ/ಆಗಸ್ಟ್ | 196 - 229 |
| 09 | ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಛೇಧಕ ರೇಖೆಗಳು | 15 | ನವಂಬರ್ | 230 - 249 |
| 10 | ಕ್ಷೇತ್ರ ಗಣಿತ | 10 | ಡಿಸೆಂಬರ್ | 250 - 273 |
| 11 | ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ | 15 | ಆಗಸ್ಟ್ | 274 - 298 |
| 12 | ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ - ಅನ್ವಯಿಕೆಗಳು | 08 | ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ | 299 - 309 |
| 13 | ಸಂಭವನೀಯತೆ | 10 | ಜನವರಿ | 310 - 327 |
| 14 | ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರ | 15 | ಜುಲೈ | 328 - 357 |
| ಅನುಬಂಧ | ಗಣಿತ ಮಾದರಿಗಳು - ಪದ್ಧತಿಗಳು | 08 | ಜನವರಿ | 358- 370 |
| | ಉತ್ತರಗಳು | | | 371 - 388 |
| | ಪುನರಾವರ್ತನೆ | | ಫೆಬ್ರವರಿ | |

# ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

– ರವೀಂದ್ರನಾಥ ಠಾಗೂರ್

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ ।
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ ॥
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧ್ ಗುಜರಾತ ಮರಾಠಾ ।
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗಾ ॥
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ ।
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿ ತರಂಗಾ ॥
ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ ।
ತವ ಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ ॥
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯ ಗಾಥಾ ।
ಜನಗಣ ಮಂಗಳದಾಯಕ ಜಯ ಹೇ ॥
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ ॥
ಜಯ ಹೇ ! ಜಯ ಹೇ ! ಜಯ ಹೇ ॥
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ ।

# ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಪೈಡಿಮರ್ರಿ ವೆಂಕಟ ಸುಬ್ಬರಾವು

"ಭಾರತ ದೇಶ ನನ್ನ ಮಾತೃಭೂಮಿ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರರು. ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಲಕ್ಷಣವು ನನಗೆ ಆತೀವ ಹೆಮ್ಮೆ ತಂದಿದೆ. ಈ ದೇಶದ ಉನ್ನತ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ತಲುಪಲು ನಾನು ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇನೆ

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಸುಸಂಪನ್ನವಾದ ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನೂ, ನನ್ನ ತಂದೆ ತಾಯಿಗಳನ್ನೂ, ಉಪಾಧ್ಯಾಯರನ್ನೂ ಎಲ್ಲ ಹಿರಿಯರನ್ನೂ ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೊಡನೆ ಮರ್ಯಾದೆಯಿಂದ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನನ್ನ ದೇಶದ ಬಗ್ಗೆ ನನ್ನ ಪ್ರಜೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಸೇವಾ ನಿಷ್ಠೆ ಪಡೆದಿರುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ. ಅವರ ಶ್ರೇಯೋಭಿವೃದ್ಧಿಗಳೇ ನನ್ನ ಆನಂದಕ್ಕೆ ಮೂಲ."

# ಅಧ್ಯಾಯ 1

# ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
## (Real Numbers)

### 1.1 ಪರಿಚಯ

ನಮ್ಮ ಜೀವನವೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ನೀವು ಹುಟ್ಟಿದ ಸಮಯವನ್ನು ಗುರ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ತಂದೆ ತಾಯಿಗಳು ನಿಮ್ಮ ಹುಟ್ಟಿದ ಸಮಯವನ್ನು, ನಿಮ್ಮ ಉದ್ದವನ್ನು, ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ನಿಮ್ಮ ಕಾಲುಗಳು ಮತ್ತು ಕೈಗಳ ಬೆರಳುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿ ಇರುತ್ತೀರಿ. ಆಮೇಲೆ ನಮ್ಮ ಜೀವನವೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೊನೆಯವರೆಗೂ ನಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಇನ್ನೂ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುತ್ತೀರಿ? ನಮ್ಮ ವಯಸ್ಸು, ಆದಾಯ ವ್ಯಯಗಳು ಮತ್ತು ಉಳಿತಾಯಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಲ್ಲವೇ !

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತಷ್ಟು ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಗಣಿತ ಸಾಮ್ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮುಖ್ಯ ಪಾತ್ರವನ್ನು ಪೋಷಿಸುತ್ತವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಿರಿಮೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಆಶ್ಚರ್ಯಪಡಿಸುವ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿನ ಜೋಡಣೆಗಳು ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಸೌಂದರ್ಯದ ಮೂಲಕ ನಮಗೆ ಅಂದವಾದ ಅನುಭೂತಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ನೀವು ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ ವಿಹರಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪು ಕೆಲವು ಹೂವುಗಳ ಮೇಲೆ ಕೂರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ ! ಅಂತಹ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಊಹಿಸೋಣ. ಒಂದು ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪು ಎರಡು ಹೂವುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂತಾಗ ಒಂದು ಜೇನುನೊಣ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಗುಂಪು ಮೂರು ಹೂವುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂತಾಗ ಎರಡು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಉಳಿದರೆ ಅದೇ ಗುಂಪು ನಾಲ್ಕು ಹೂವುಗಳ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂತಾಗ ಮೂರು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ ಹಾಗೆಯೇ ಆ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪು ಐದು ಹೂವುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೂತಾಗ ನಾಲ್ಕು ಜೇನು ನೊಣಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಆ ಗುಂಪು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ ಐವತ್ತು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಇವೆ ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ ಆಗ ಆ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿನ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಫಜಿಲ್‌ನಿಂದ ಸಾಧಿಸೋಣವೇ?

ಈ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿನ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ‘ $x$ ’ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಕೊನೆಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ $x \le 50$ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆ ಜೇನು ನೊಣಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಐದು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಜೇನುನೊಣ ಸಹ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ! ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ‘ $a$ ’ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x = 5a + 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅದೇ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಮೂರು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ '$b$'ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x = 4b + 3$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹಾಗೆಯೇ ಅದೇ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಮೂರು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಎರಡು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ '$c$'ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x = 4c + 2$ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹಾಗೆಯೇ ಅದೇ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಜೇನುನೊಣ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ '$d$'ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x = 4d + 1$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು $x$ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $y$ (ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $y$ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $5, 4, 3, 2$ ) ಗಳು ಇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ $x$ ನ್ನು $y$ ಭಾಗಿಸದಾಗೆಲ್ಲಾ ಶೇಷ (ಇಲ್ಲಿ $r$ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $0, 3, 2, 1$) ಬರುವ ವಿಧವಾಗಿ ಇವೆ.

ಈ ಪೂರ್ತಿ ವಿಷಯವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ "**ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $r$ ಬೆಲೆ $y$ ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ**".

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದ ಹಾಗೆಯೇ "**ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ**"(Euclid division lemma) ನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ.

ನಂತರ ಮತ್ತೇ ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಹೋದರೆ, ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದೋ ಗೊತ್ತೇ? ಮೊದಲು ನಾವು $x = 5a + 0$ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದೆಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಶೇಷ 1 ಬಂದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 5ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 5, 15, 25, 35 ಮತ್ತು 45 ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉಳಿದ ಎರಡು ನಿಬಂಧಗಳನ್ನು ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 35 ಕೇವಲ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 35 ಜೇನುನೊಣಗಳು ಇವೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸರಿನೋಡೋಣವೇ!

35 ನ್ನು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 1 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

$35 = 2 \times 17 + 1$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

35 ನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 2 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

$35 = 3 \times 11 + 2$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

35 ನ್ನು 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 3 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

$35 = 4 \times 8 + 3$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

35 ನ್ನು 5ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 0 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

$35 = 5 \times 7 + 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ವಿಷಯವನ್ನು ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a$ ಮತ್ತು $b$ (ಕ್ರಮವಾಗಿ ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳು) ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ $q$ ಮತ್ತು $r$ (ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷ) ಗಳನ್ನು

$a = bq + r,\ 0 \leq r < b$ ನ್ನು ಸಂತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

$a = bq + r$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $q$ ಮತ್ತು $r$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $a = 13,\ b = 3$ (ii) $a = 8,\ b = 80$ (iii) $a = 125,\ b = 5$

(iv) $a = 132,\ b = 11$

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

ಮೇಲೆ 'ಇವು ಮಾಡಿರಿ' ನಲ್ಲಿನ $q$ ಮತ್ತು $r$ ಗಳ ಸ್ವಭಾವ ಏನು?

**ಪ್ರಮೇಯ - 1.1 : ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ (Euclid division lemma) :**

$a = bq + r,\ 0 \le r < b$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳ ಜೊತೆಗನುಗುಣವಾಗಿ $q$ ಮತ್ತು $r$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧ ಬಹಳ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಎಲೆಮೆಂಟ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ 7ನೇ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಅನುಪ್ರಮೇಯದ ಹಲವಾರು ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು , ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ ವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ '$a$' ಮತ್ತು '$b$' ಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ ವು ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ '$d$ 'ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 60 ಮತ್ತು 100 ರ ಮ. ಸಾ. ಅ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ :**

60 ಸೆಂ.ಮೀ., 100 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಿರುವ ಎರಡು ಪೇಪರ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಎರಡು ಪೇಪರ್ ತುಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಭಾಗವು ಉಳಿಯದಂತೆ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಲ್ಲ ಗರಿಷ್ಠ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಪೇಪರ್ ತುಂಡನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವದೇ ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

60 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಪೇಪರ್ ತುಂಡಿನಿಂದ 100 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಪೇಪರ್ ತುಂಡನ್ನು ಅಳೆದಿದ್ದಾದರೆ, ಇನ್ನು 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಭಾಗವು ಉಳಿಯುವುದು.

ಈಗ 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಪೇಪರ್ ತುಂಡಿನಿಂದ 60 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಪೇಪರ್ ತುಂಡನ್ನು ಅಳೆಯೋಣ. ಈಗ ಮತ್ತೇ 20 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳ ಭಾಗವು ಉಳಿಯುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ 20 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳ ಉದ್ದವಿರುವ ಪೇಪರ್ ತುಂಡಿನಿಂದ 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಪೇಪರ್ ತುಂಡನ್ನು ಅಳೆಯೋಣ. ಈಗ 20 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳ ಭಾಗವು ಉಳಿಯುವುದು. ಉಳಿದ 20 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳ ಭಾಗವನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯ ಪೇಪರ್ ತುಂಡಿನಿಂದ ಅಳೆದದ್ದಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಏಕಿಭವಿಸುವವು ಎಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಏನು ಉಳಿಯದು.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ 60 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 100 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಎರಡು ಪೇಪರ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಯಾವ ಭಾಗವು ಉಳಿಯದಂತೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಪೇಪರ್‌ನ ಗರಿಷ್ಠ ಉದ್ದ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

60 ಮತ್ತು 100 ರ ಮ. ಸಾ. ಅ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯಂತೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

100ನ್ನು 60ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

$100 = 60 \times 1 + 40$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನವುದರಲ್ಲಿ ಭಾಜಕ 60 ಮತ್ತು ಶೇಷ 40 ಇದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಅದನ್ನು

$60 = 40 \times 1 + 20$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನವುದರಲ್ಲಿ 40 ಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಶೇಷ 20 ಇದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಅದನ್ನು

$40 = 20 \times 1 + 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನವುದರಲ್ಲಿ ಶೇಷ 0 ಬಂದಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಇದನ್ನೂ ಇನ್ನೂ ಮುಂದುವರಿಸಲಾರೆವು.

ಮೇಲಿನ ಕೊನೆ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಭಾಜಕವಾದ 20 ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 60 ಮತ್ತು 100 ಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ 20 ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

60 ಮತ್ತು 100 ಗಳಿಗೆ ಅಪವರ್ತನಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಬರೆದು ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

m ಮತ್ತು n ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು m ಮತ್ತು n ಮ.ಸ.ಅ.ವನ್ನು H.C.F.(m,n) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 50 ಮತ್ತು 70 (ii) 96 ಮತ್ತು 70 (iii) 300 ಮತ್ತು 550

(iv) 1860 ಮತ್ತು 2015

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

1.2 ಮತ್ತು 0.12 ಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ.ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರೇ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ ಕೇವಲ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ .ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಾತ್ರವೇ ಅಲ್ಲದೇ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಪ್ರೋಗ್ರಾಮಿಂಗ್‌ಗೋಸ್ಕರ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಲ್ಗಾರಿಥಂನ್ನು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

**ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :**

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂ ಎರಡು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪರಸ್ಪರ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂ ಯಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಾರೆ.
2. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂ ಕೇವಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೇಲೆಯೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೂ, ಅದನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ (ಅಂದರೆ $a$ ಮತ್ತು $b \neq 0$)ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂನ ಅನ್ವಯಿಕೆಗಳು ಬಹಳ ಇವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ - 1 :** $q$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪ್ರತಿ ಧನ ಸರಿ ಪೂಣಾಂಕ $2q$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $2q + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $a$ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ , $b = 2$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂ ನನುಸರಿಸಿ $a = bq + r,$ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $q \geq 0$ ಗೆ ಮತ್ತು $r = 0$ ಅಥವಾ $r = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $0 \leq r < 1$. ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 2q$ ಅಥವಾ $2q + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸರಿ ಅಥವಾ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ. $a$ ಎಂಬುದು $2q$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದು ಸರಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗುತ್ತದೆ. $a$ ಎಂಬುದು ಸರಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗದಿದ್ದರೆ ಅದು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗುವ ಅವಕಾಶ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು $2q + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ - 2 :** $q$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಂತೆ, ಪ್ರತಿ ಧನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ $4q + 1$ ಅಥವಾ $4q + 3$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $a$ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದು ಕೊಂಡಾಗ, ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂ $a$ ಮತ್ತು $b = 4$ ಮೇಲೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$0 \leq r < 4$, ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇಷವನ್ನು $0, 1, 2$ ಮತ್ತು $3$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಇವುಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ '$a$' ನ ಬೆಲೆಗಳು $4q, \ 4q + 1, \ 4q + 2$ ಅಥವಾ $4q + 3$ ($q$ ಭಾಗಲಬ್ಧ) ಆಗಬಹುದು. $4q=2(2q)$ ಅಥವಾ $4q + 2$ - $2(2q+1)$ ಈ ಎರಡು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗುವ ಅವಕಾಶ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ $a$ ನ ರೂಪ $4q + 1$ ಅಥವಾ $4q + 3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.1

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಶೇಷ ಅಲ್ಗಾರಿಥಂನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ. ಸಾ. ಅ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 900 ಮತ್ತು 270 (ii) 196 ಮತ್ತು 38220 (iii) 1651 ಮತ್ತು 2032

2. $q$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, ಪ್ರತಿ ಧನ ಬೆಸ ಪೂಣಾಂಕ $6q+1$ ಅಥವಾ $6q+3$ ಅಥವಾ $6q+5$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು $3p, \ 3p+1$ ಅಥವಾ $3p+2$ (ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $p$ ಗೆ) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಘನವು $9m, \ 9m+1$ ಅಥವಾ $9m+8$ (ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $m$ ಗೆ) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $n$ ಗೆ $n, \ n+2$ ಅಥವಾ $n+4$ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರವೇ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

## 1.2 ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ :

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ " $a = bq + r,\ 0 \leq r < b$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a$ ಮತ್ತು $b$ಗಳ ಜೊತೆಗನುಗುಣವಾಗಿ $q$ ಮತ್ತು $r$ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತವೆ "ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ $a = bq + r$ ನಲ್ಲಿ $r = 0$ ಆದರೆ $a$, $b$ ಮತ್ತು $q$ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಮೇಲೆ ನೀವು ನಡೆಸಿದ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ '$a$' ಎಂಬುದು '$b$'ನಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾದರೆ '$b$'ನ್ನು '$a$' ಗೆ ಅಪವರ್ತನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆಂದು ತಿಳಿದು ಕೊಂಡಿರುತ್ತೀರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $24 = 2 \times 12$

$24 = 8 \times 3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$24 = 2 \times 12$ ಆದರೆ 2 ಮತ್ತು 12 ಗಳನ್ನು 24 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ಯಾಗಿ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2, 3, 7, 11 ಮತ್ತು 23 ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿಯಾದರೂ ಗುಣಿಸಿವುದರ ಮೂಲಕ ನಾವು ಅತಿದೊಡ್ಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಅನಂತ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$2 \times 3 \times 11 = 66$

$7 \times 11 = 77$

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

ಈಗ, ನೀವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಥವಾ 2ಕ್ಕಿಂತ ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ನಮಗೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿ ವಿಭಿನ್ನ ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ(ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ)ಗಳೂ ಸಹ ಬರುತ್ತವೆ. ಇಗ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವು ಯಾವುದೇ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಕಣಾಂಕಗಳ ಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹು

**ಪ್ರಮೇಯ -1.2 : (ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ) : ಪ್ರತಿ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ(ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ)ಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಈ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಈ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ "ಪ್ರತಿ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ(ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ)ಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ' ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ(ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ) ಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ(unique)ವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಾವು 210 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಇದನ್ನು $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ಅಥವಾ $3 \times 5 \times 7 \times 2$, ಅಥವಾ ಯಾವ ವಿಧದಲ್ಲಾದರೂ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ(ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ)ಯಾದರೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕವಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ) $x$ ನ್ನು $x = p_1 p_2 \ldots p_n$, ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ $p_1$, $p_2, \ldots, p_n$ ಎನ್ನುವವು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು, ಅಂದರೆ $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ಸಮ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಘಾತಾಂಕಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $27300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

2310 ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೋ ನೋಡಿರಿ. ನೀನು ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆಯೇ ಅವರು ಸಹ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆಯೇ? ಕೊನೆ ಫಲಿತವನ್ನು, ನಿನ್ನ ಸ್ನೇಹಿತರ ಫಲಿತದೊಂದಿಗೆ ಸರಿನೋಡಿರಿ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ 3 ಅಥವಾ 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. ನೀನು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವೆ?

**ಮತ್ತೆ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ**

**ಉದಾಹರಣೆ – 3.** $n$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $4^n$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. $n$ ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ $4^n$ ವಿಸ್ತರಣೆ 'ಸೊನ್ನೆ'ಅಂಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಅಂತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $4^n$ ಬೆಲೆಯಿರುವ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂದರೆ ಅದು '5' ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ $4^n$ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 5 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $4^n = (2)^{2n}$. ಆದ್ದರಿಂದ $4^n$ ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ '5' ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ n ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಲೆಗಾದರೂ $4^n$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 'ಸೊನ್ನೆ'ಯಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ (ಮಹತ್ತರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ) ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. (ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ)ವನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಪೂರ್ಣ ಗ್ರಹಿಕೆ ಇಲ್ಲದೆ.

ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನೇ ನಾವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ನಾವು ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ – 4.** 12 ಮತ್ತು 18 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ನಮಗೆ $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(12, 18) ರ ಮ.ಸಾ.ಅ $= 2^1 \times 3^1 = 6$ = **ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಕನಿಷ್ಟ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ .**

(12, 18) ರ ಲ.ಸಾ.ಅ $= 2^2 \times 3^2 = 36$ = **ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ**

$6 \times 36 = 12 \times 18 =$ **ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ**

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, ನೀವು ಒಂದು ಸಂಬಂಧ ಅಂದರೆ (12, 18) ರ ಮ.ಸಾ.ಅ $\times$ (12, 18) ರ ಲ.ಸಾ.ಅ $(12 \times 18)$ ಗುಣಲಬ್ಧ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ. ಅಂದರೆ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ $(a,b) \times$ ಲ.ಸಾ.ಅ $(a, b) = a \times b$ ಆಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿನೋಡಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ ತಿಳಿದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಈ ಸಂಬಂಧದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಲ. ಸಾ. ಅ ಮತ್ತು ಮ. ಸಾ. ಅ ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

'$n$' ಮತ್ತು '$m$' ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $3^n \times 4^m$ ಗಳ ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಇದು ಸತ್ಯವೇ ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.
   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
2. ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 12, 15 ಮತ್ತು 21 (ii) 17, 23, ಮತ್ತು 29 (iii) 8, 9 ಮತ್ತು 25
   (iv) 72 ಮತ್ತು 108 (v) 306 ಮತ್ತು 657
3. $n$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $6^n$ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ ಮತ್ತು $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ)ಗಳಾಗುತ್ತವೆಯೋ ವಿವರಿಸಿರಿ.
5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ ಎಂಬುವುದು ಒಂದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೀರಿ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
6. $6^{100}$ ನ ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆ ಯಾವುದು?

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಮತ್ತಷ್ಟು ಆಳವಾಗಿ ಪರಿಶೋಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಮೊದಲು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{5}$ ಮೊದಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ (Irrational Numbers) ಗಳಾಗಿ ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

## 1.2.1 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ ಅಲ್ಲವೇ! ಕೊಡಲಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಮೊದಲು, ನಂತರದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತೇವೆ? ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೊದಲು ಅಥವಾ ನಂತರ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲ ಅಥವಾ ನಂತರದ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲು 1 ರಿಂದ ಕೂಡಿಸುವ ಅಥವಾ ಕಳೆಯುವದಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗಾದರೆ 0 ಮತ್ತು 1 ಅಥವಾ 1 ಮತ್ತು 2 ಮೊದಲಾದವುಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವುದೆಂದು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರೇ? ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ? ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕವಾಗುವ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವುದೆಂದು ನೀವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಇಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ($\frac{p}{q}$, $q\neq 0$) ಎನ್ನುವುದು ಯಾವಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆಯೋ ಯಾವಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆಯೋ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನಾವು ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5

ಈಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಛೇಧದಲ್ಲಿನ ಘಾತಾಂಕಗಳೆಲ್ಲವೂ 10ರ ಆಧಾರವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಅಂಶ, ಛೇದಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದು, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3\times 5^3}{2^3\times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3\times 13}{2^2\times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3\times 7}{2^4\times 5^4} = \frac{7}{2^4\times 5}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2\times 5} = \frac{25}{2}$

ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸುವಾಗ $p$ ಮತ್ತು $q$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹ – ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು (Co - primes) ಮತ್ತು ಛೇದ (ಎಂದರೆ $q$) ದ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2 ಮತ್ತು 5 ಅಥವಾ ಎರಡನ್ನೂ ಘಾತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಈ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ 10 ರ ಘಾತಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಗಳು 2 ಅಥವಾ 5 ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಘಾತಗಳಾಗಿ ಮಾತ್ರವೇ ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ಪಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಛೇದಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ?

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ($\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ಮತ್ತು $p, q$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹ – ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.

### ನಾವು ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಮುಗಿಸೋಣ

ನಾವು ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೂ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೂಪವಾದರೂ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ಆದಾಗ ಆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಛೇದವನ್ನು 10 ರ ಘಾತಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. 10 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಕೇವಲ 2 ಮತ್ತು 5 ಮಾತ್ರವೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸುವಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತಾ $q$ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $2^n5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $n$ ಮತ್ತು $m$ ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

ಫಲಿತವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

**ಪ್ರಮೇಯ -1.3 : x ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ, ಆದಾಗ x ನ್ನು p ಮತ್ತು q ಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿರುವ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಮತ್ತು q ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $2^n5^m$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ n, m ಎನ್ನುವವು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.**

ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಒಂದಿಷ್ಟು ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಿಂದ $q$ ನ ರೂಪ $2^n5^m$ (ಇದರಲ್ಲಿ n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ) ಹೊಂದಿರುವ $\frac{p}{q}$ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಾಂಶವು ಆಗುತ್ತದೆಯೇ?

ಇದರಿಂದ ನಾವು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು, q ಎನ್ನುವುದು $2^n5^m$ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ b ಎನ್ನುವುದು 10 ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಭಾವಿಸಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಮೊದಲು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ವಿಲೋಮವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$ (ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$ (iv) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು ಇದರಲ್ಲಿ $q$ ನ ರೂಪ $2^n5^m$ ಹೊಂದಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{a}{b}$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಮತ್ತು ಇದರಲ್ಲಿ $b$ ಎಂಬುದು 10 ರ ಘಾತವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಥವಾ ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ q ಎನ್ನುವುದು 10 ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಒಂದು ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 1.3ರ ವಿಲೋಮವು ಸಹ ಸತ್ಯವೇ, ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

**ಪ್ರಮೇಯ - 1.4 : n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು q ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪ $2^n5^m$ ಹೊಂದಿರುವಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $x = \frac{p}{q}$ ಆದರೆ, x ನ ದಶಂಮಾಂಶರೂಪ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ (ಪರಿಮಿತ) ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆಗುತ್ತದೆ.**

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $q$ನ್ನು $2^n5^m$ ಮತ್ತು n, mಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{23}$ (v) $\frac{80}{81}$

## 1.2.3 ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ ಹೊಂದುವ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು

ನಾವು ಈಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತಕ ಹೊಂದುವ ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ

$\frac{1}{7}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ .

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ '142857' ಅಂಕೆಗಳ ಸಮೂಹ ಆವರ್ತ ಹೊಂದುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. .

**ಈ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದ 7 ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು $2^n5^m$ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.**

$$\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\,\overline{)\,1.0000000} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}$$

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಅಥವಾ ಆವರ್ತಕ ಹೊಂದುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸಮೂಹವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

ಮೇಲೆ ನೀವು ಮಾಡಿದ ' ಇವುಮಾಡಿರಿ ' ಅಭ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

**ಪ್ರಮೇಯ -1.5 : n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು q ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪ $2^n5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $x = \frac{p}{q}$ ಆದರೆ x ನ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ, ಆವರ್ತಕವಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ಆಗುತ್ತದೆ.**

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ನಾವು “ ಪ್ರತಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ” ಅಥವಾ “ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತವಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ”ವಾಗಲೀ ಆಗುವುದೆಂದು ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳೋ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

**ಪರಿಹಾರ :**

(i) $\frac{16}{125} = \frac{16}{5\times5\times5} = \frac{16}{5^3}$ (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ)

(ii) $\frac{25}{32} = \frac{25}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{25}{2^5}$ (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ)

(iii) $\frac{100}{81} = \frac{100}{3\times3\times3\times3} = \frac{10}{3^4}$ (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ)

(iv) $\frac{41}{75} = \frac{41}{3\times5\times5} = \frac{41}{3\times5^2}$ ( ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ )

**ಉದಾಹರಣೆ -4.** ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆಯೇ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

**ಪರಿಹಾರ :**

(i) $\frac{35}{50} = \frac{7\times5}{2\times5\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10^1} = 0.7$

(ii) $\frac{21}{25} = \frac{21}{5\times5} = \frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2} = \frac{21\times4}{5^2\times2^2} = \frac{84}{10^2} = 0.84$

(iii) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2\times2\times2} = \frac{7}{2^3} = \frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)} = \frac{7\times25}{(2\times5)^3} = \frac{875}{(10)^3} = 0.875$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳು, ಯಾವುವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆ ಇಲ್ಲದೆಯೇ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುಗಳನ್ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲವೋ? ಯಾವುಗಳನ್ನು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. ಪ್ರಮೇಯ 1.4 ನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಭಾಗಿಸದೇ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯಾ ರೂಪಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಕೊಡಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿದ್ದು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾದರೆ $q$ ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನೀನು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲೆ?

(i) 43.123 (ii) 0.1201201 (iii) $43.\overline{12}$ (iv) $0.\overline{63}$

## 1.3 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು -ಮತ್ತಷ್ಟು ಅಂಶಗಳು

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಅವು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತವೆ? ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗುವುದೆಂದು ಸಹ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ ಅವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಆಗುತ್ತವೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸಿಯೂ ಇಲ್ಲ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ಮತ್ತು $\sqrt{p}$ ($p$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ) ಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ

$p$, $q$ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q \neq 0$ ಆದರೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** (Irrational Numbers) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳನ್ನು "$Q^1$" ಅಥವಾ "S" ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರೆಂದು ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ಕೆಲವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಉದಾಹರಿಸೋಣ .

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110…, ಮೊದಲಾದವು.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಕೆಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ಮೊದಲಾದವು. ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $p$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\sqrt{p}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$\sqrt{2}$ ನ್ನುನಾವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಸಾಧಿಸುವ ಮುಂಚೆ ಇದನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯಾಧಾರಿತ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಲಿತು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ

**ಪ್ರಮೇಯ -1.6 : ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $p$ ಯು $a^2$ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆಗ $p$ ಯು $a$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ, ಇಲ್ಲಿ $a$ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ.**

**ಸಾಧನೆ** : ' $a$ ' ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ ' $a$ 'ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, ಇದರಲ್ಲಿ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಇರುವ ಅವಸರವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p^2{}_1p^2{}_2 \ldots p^2{}_n$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ $a^2$ ನ್ನು $p$ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ $a^2$ ನ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $p_1\ p_2 \ldots p_n$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $p$ ಎನ್ನುವುದು $p_1, p_2, \ldots p_n$ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ $p$ ಎನ್ನುವುದು $p_1p_2 \ldots p_n$, ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು '$a$'ನ್ನು ಸಹ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

p= 2, p = 5 ಮತ್ತು $a^2$= 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64 ಮತ್ತು 81 ಆದರೆ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ನಾವು ಈಗ $\sqrt{2}$ ಎನ್ನುವುದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಇಂತಹ ಸಾಧನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವೈರುಧ್ಯ (contradiction) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಸಾಧನೆ** : ಈ ಸಾಧನೆ ವಿಲೋಮ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುವುದರಿಂದ ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ದವಾಗಿ $\sqrt{2}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$\sqrt{2}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಆದರೆ $r$ ಮತ್ತು $s$ ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $(s \neq 0)$ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ಆಗುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ $r$ ಮತ್ತು $s$ ಗಳಿಗೆ 1 ಅಲ್ಲದೆ ಇತರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ಇದರಲ್ಲಿ $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $b\sqrt{2} = a$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ $2b^2 = a^2$ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $a^2$ ನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ 1.6ರ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $a^2$ ನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸಿರುವುದರಿಂದ $a$ ನ್ನು ಸಹ ಇದು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಮತ್ತೆ $a = 2c$, $c$ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮಾಡಿದರೆ $a^2 = (2c)^2$ ಇದರಲ್ಲಿ '$a$' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ $2b^2 = 4c^2$ ಅಂದರೆ $b^2 = 2c^2$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $b^2$ ನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $b$ಯನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ -1.6 ರಲ್ಲಿ $p$= 2).

ಆದ್ದರಿಂದ $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳಿಗೆ 2 ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಆಗಿದೆ.

$a$, $b$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಅದಕ್ಕಾಗಿ 1 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ $\sqrt{2}$ ಎನ್ನುವುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂಬ ಭಾವನೆ ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಕಲ್ಪನೆ ಮೂಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ನ್ನುವುದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ' $d$ 'ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, ಯಾವುದೇ ಇತರ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ವರ್ಗವಾಗಿದ್ದರೆ $\sqrt{d}$ ಯನ್ನು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಭಾವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}\ \sqrt{24}$ ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ವಿಧವಾಗಿ :

- ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು
- ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಹ ಮತ್ತೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** $5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ $(5 - \sqrt{3})$ ನ್ನು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ $a, b \in z, b \neq 0$

$\Rightarrow 5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ಇದರಲ್ಲಿ $a, b$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $b \neq 0$

$\Rightarrow 5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ ಇದನ್ನು ನಾವು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ ಎಂದು ಬರುವುದು. $\Rightarrow \frac{5b-a}{b} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\because \frac{5b-a}{b}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

ಆದರೆ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಇದು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ನಮ್ಮ ಊಹೆ, $(5 - \sqrt{3})$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪು.

$\Rightarrow 5 - \sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** $3\sqrt{2}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ $3\sqrt{2}$ ನ್ನು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ $a, b \in z, b \neq 0$

$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ಇದರಲ್ಲಿ $a, b$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $b \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow \sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\because \frac{a}{3b}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಇದು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

$\Rightarrow 3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ನ್ನು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, ಇಲ್ಲಿ $a, b \in z, b \neq 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \sqrt{3}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗ ಮಾಡಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2\frac{a}{b}\sqrt{3}$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$

$$= \frac{a^2}{b^2} + 1$$

ಅಂದರೆ $\sqrt{3} = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\because$ $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಆದರೆ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಇದು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ಎಡೆಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪು. $\therefore \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

**ಸೂಚನೆ :**

1. ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗದಿರಬಹುದು.
   a, b ಗಳು ಎರಡೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ a $= \sqrt{2}$ ಮತ್ತು b $= -\sqrt{2}$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ a + b = 0 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.
2. ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಯಾವಾಗಲೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಆಗದೇ ಹೋಗಬಹುದು.
   ಉದಾಹರಣೆಗೆ a, b ಗಳೂ ಎರಡು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ a $= \sqrt{2}$ ಮತ್ತು b $= \sqrt{8}$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ab $= \sqrt{16} = 4$, ಇದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.4

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ.
   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3 + 2\sqrt{5}$
2. $p$, $q$ ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಆದರೆ $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

## 1.4 ಘಾತಾಂಕ ಪುನಃ ಪರಿಚಯ

$a^n$ ಎಂದರೆ '$a$' ಎನ್ನುವ ಸಂಖ್ಯೆ '$n$' ಸಲ ಅಪವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$a^n$ ನ್ನು $a$ ಘಾತ $n$ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.

$$a^n = \underbrace{a.a.a......a}_{n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}}$$

2 ರ ಘಾತಗಳು $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$ ......... ಗಳು

3 ರ ಘಾತಗಳು $3^0$, $3^1$, $3^2$, $3^3$ .......... ಗಳು ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ನಾವು ಈ ಹಿಂದೆ ಆಲೋಚಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ 81 ಎನ್ನುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $3^4$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದಲ್ಲಾ!

$81 = 3\times3\times3\times3 = 3^4$

$81 = 3^4$ ರಲ್ಲಿ 81ನ್ನು ಪಾದ 3 ರ 4ನೇ ಘಾತ ಎನ್ನುವರು. $3^4$ ನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪವೆನ್ನುವರು.

ಒಂದು ಸಾರಿ ನಾವು ಘಾತಾಂಕ ನ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

*a, b* ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $a \neq o, b \neq o$ ಮತ್ತು *m, n* ಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದರೆ

$(i) a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad (ii) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (iii) (ab)^m = a^m, b^m$ $\quad (iv) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(v) \left(a^m\right)^n = a^{m,n}$ $\quad (vi) a^0 = 1$ $\quad (vii) a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

ಇವು ಮಾಡಿರಿ.

1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ.

i) $2^1$ $\quad$ (ii) $(4.73)^0$ $\quad$ iii) $0^3$ $\quad$ iv) $(-1)^4$ $\quad$ v) $(0.25)^{-1}$ $\quad$ vi) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $\quad$ vii) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

2) a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 ಗಳನ್ನು ಘಾತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

b) i) $16 \times 64$ $\quad$ ii) $25 \times 125$ $\quad$ iii) $128 \div 32$ ಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

### 1.4.1 ಘಾತಗಳು ಲಘು ಗಣಕಗಳು :

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow$ ಆದಕ್ಕೆ $x = 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$3^y = 81 = 3^4 \Rightarrow$ ಆದಕ್ಕೆ $y = 4$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$10^z = 100000 = 10^5 \Rightarrow$ ಆದಕ್ಕೆ $z = 5$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ

$2^x = 5, 3^x = 7, 10^x = 5$

ಮೇಲಿನವುಗಳಲ್ಲಿ *x* ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳ ಬಲ್ಲೆಯಾ ? ಒಂದು ಸಲ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಯೇನು ?

$2^x = 5$ ರಲ್ಲಿ 2 ರ ಘಾತ ಎಷ್ಟಾದರೆ 5 ಆಗುವುದು ?

ಆದುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $x$ ಮತ್ತು 5 ರ ನಡುವೆ ಒಂದು ಹೊಸ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

($x$ ನ ಬೆಲೆ $-2$ ಆದರೆ $2^{-2} = 1/4 = 0.25$

$x$ ನ ಬೆಲೆ $-1$ ಆದರೆ $2^{-1} = 1/2 = 0.5$

$x$ ನ ಬೆಲೆ 0 ಆದರೆ $2^0 = 1 = 1$

$x$ ನ ಬೆಲೆ 1 ಆದರೆ $2^1 = 2 = 2$

$x$ ನ ಬೆಲೆ 2 ಆದರೆ $2^2 = 4 = 4$

0.25, 0.5, 1, 2, 4 ಗಳ ಪದಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅಲೋಚಿಸಿರಿ.

$1 \times 0.25 = 0.25$

$2 \times 0.25 = 0.5$

$4 \times 0.25 = 1$

$8 \times 0.25 = 2$

$16 \times 0.25 = 4$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದಲ್ಲಾ!

$x$ ನ ಯಾವುದಾದರು ಬೆಲೆಗೆ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭ. ಆದರೆ ಲಬ್ಧವು ಬರುವ ಹಾಗೆ $x$ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಯಾಗುವುದೋ ಹೇಳುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಲೋಚಿಸಿರಿ.) ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಲಘುಗಣಕ ಎನ್ನುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $2x = y$ ನಲ್ಲಿ $x$ ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದಾಗ $y = 5$ ಆಗುವುದೋ ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$x = 1$ ಆದರೆ $y = 2^1 = 2$, $x = 2$ ಆದರೆ $y = 2^2 = 4$, $x = 3$ ಆದರೆ $y = 2^3 = 8$ ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರಿಂದ $x$ ಬೆಲೆ 2 ಮತ್ತು 3 ನಡುವೆ ಇರುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

($x$ ಬೆಲೆ 2ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪ ಇರುವುದೇ ? ಇಲ್ಲವೆ 3ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪ ಇರುವುದೇ ? $x$ ಬೆಲೆ 2ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪ ಇರುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದರ ಬೆಲೆಗೆ ಯತ್ನ-ದೋಷ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಫಲಿತವಾಗಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಘಾತಗಳ ನ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ಲಘುಗಣಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅರಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ $2^x = 5$ ರಲ್ಲಿ $x$ ನ್ನು 2 ಪಾದಕ್ಕೆ 5 ರ ಲಘುಗಣಕ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $x = log_2 5$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವರು. ಇಗ ನಮಗೆ $y = 2^x$ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $x$ ಒಂದು ಬೆಲೆ $2^x = 5$ ವನ್ನು ಗುರುತಿಸೋಣ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $10^y = 25$ ಆದರೆ $y = log_{10} 25$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವರು.

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $y = log_{10} 25$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.)

10 ಪಾದವಾಗಿರುವ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ಲಘು ಗಣಕ ಎನ್ನುವರು. ಲಘು ಗಣಕದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ $a \neq 1$, $N>o$, ಮತ್ತು $a$ ಮತ್ತು $N$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$log_a N=x$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $x$ ನ್ನು $a$ ಪಾದಕ್ಕೆ $N$ ನ ಲಘುಗಣಕ ಎನ್ನುವರು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

1) ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಲಘುಗಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$(i) 7 = 2^x$ $(ii) 10 = 5^b$ $(iii) \frac{1}{8^1} = 3^c$ $(iv) 100 = 10^z$ $(v) \frac{1}{257} = 4^a$

2) ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಘಾತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$(i) \log_{10} 100 = 2$ $(ii) \log_5 25 = 2$ $(iii) \log_2 2 = 1$

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ :

$(i) \log_2 32 = x$ $(ii) \log_5 625 = y$ $(iii) \log_{10} 10000 = z$ $(iv) \log_x 16 = 2$ ಆದರೆ $x^2 = 16$ ಮತ್ತು $x = \pm 4$ ಆಗುವುದು ಇದ ಸತ್ಯವೋ ? ಅಸತ್ಯವೋ ?

### $y = 2^x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರ :

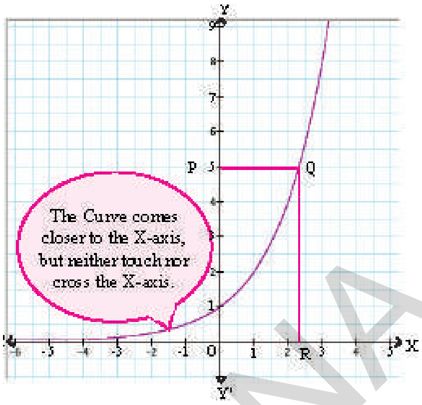
$y = 2^x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. $x$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $y$ ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವು.

ಮೇಲಿನ $x$ ಮತ್ತು $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು.

| $x$ | 0 | 1 | 3 | 2 | -1 | -2 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2^x$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 1/2 | 1/4 | 1/8 |

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $x$ ಮತ್ತು $y$ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ, ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವದರಿಂದ ಒಂದು ಸರಳ ವಕ್ರರೇಖೆ ಏರ್ಪಡುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಿಂದ ನಾವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು ? $x$ ನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತಲ್ಲಾ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ $y = 2^x$ ಬೆಲೆ ಕೂಡಾ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗಿ ಅದರ ಬೆಲೆ 0 ಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ 0 ಆಗಲಾರದು ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.




$y = 2^x$ ನಲ್ಲಿ $x$ ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $y = 5$ ಆಗುವುದೋ ಯೋಚಿಸೋಣ.

ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ Y – ಅಕ್ಷವು $2^x$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಅಲ್ಲವೇ ! ಮತ್ತು X - ಅಕ್ಷವು ಏನನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ? ಎಂದರೆ X – ಅಕ್ಷವು $x$ ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈಗ Y– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 5 ಬೆಲೆ ಎಲ್ಲಿದೆಯೋ ಗುರ್ತಿಸಿ, ಅಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು 'P' ಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಗ್ರಾಫ್‌ನ್ನು ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು Q ನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. Q ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ QR ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ QR ನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸುಮಾರಾಗಿ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದೋ ಅಂದಾಜಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ ? ಯೋಚಿಸಿರಿ.

ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ R ಬಿಂದು X ಅಕ್ಷೆಯ ನಿರೂಪಕ $2^x = 5$ ಆಗುವಂತೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ x ನ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು 2 ಆಳತೆಗಳ 5ರ ಲಘುಗಣ ಅದನ್ನು $\log_2^5$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

**ಆಲೋಚಿಸಿರಿ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ:**

ಈಗ ಸೂಚಕ ಭಿನ್ನ X – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (ಅನುಪಾತ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ನೋಡಿ) ಎಷ್ಟಿದೆಯೋ ಗಮನಿಸಿರಿ.

10 ಚದರಗಳಿಗೆ 1 ಯುನಿಟ್ ಆದಾಗ

20 ಚದರಗಳಿಗೆ 2 ಯುನಿಟ್ ಆದಾಗ

40 ಚದರಗಳಿಗೆ 4 ಯುನಿಟ್ ಆದಾಗ

Y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 5 ಅನುರೂಪ ಬೆಲೆ – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟಿದೆಯೋ ಊಹಿಸಿರಿ.

ಪಕ್ಕದ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕೂಡಾ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದೇ ಯೋಚಿಸಿ.

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2^x$ | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 |

| $y$ | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=\log_2^4$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

ಲಘುಗಣಕ ಭಾವನೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು $y = 2^x$ ನ ಗ್ರಾಫ್ (ರೇಖಾಚಿತ್ರ) ವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $y = 2^x$ ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$y=\frac{1}{4}$ ಆದರೆ $x = -2$ ; $2^{-2} = \frac{1}{4}$ ಆದರೆ $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y=\frac{1}{2}$ ಆದರೆ $x = -1$ ; $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ಆದರೆ $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y=2$ ಆದರೆ $x = 1$ ; $2^1 = 2$ ಆದರೆ $1 = \log_2^2$

$y=4$ ಆದರೆ $x = 2$ ; $2^2 = 4$ ಆದರೆ $2 = \log_2^4$

$y=8$ ಆದರೆ $x = 3$ ; $2^3 = 8$ ಆದರೆ $3 = \log_2^8$

ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳಿಂದ ನೀವು ಏನು ಗ್ರಹಿಸಿದ್ದಿರಿ ?

ನಾವು ಮೇಲಿನವುಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು 2 ರ $x$ ಘಾತ $y = 2^x$ ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರು ಬಿಂದುವಿನ $y$ ನಿರೂಪಕವನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಘಾತಗಳು ಮತ್ತು ಲಘುಗಣಕಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧಗಳು ಆಗುವವೇ ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$y=2^x$ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ವಕ್ರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ $y$ ನಿರೂಪಕಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪ ವಾಗಿರುವ ಏಕೈಕ $x$ ನಿರೂಪಕ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಏಕೈಕ ಲಘುಗಣಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುವುದು ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

**ಆಲೋಚಿಸಿರಿ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ:**

1) $\log_2{}^0$ ಬೆಲೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುವುದೇ ? ಇಲ್ಲವೇ ? ಕಾರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿರಿ.

2) i) $\text{Log}_a{}^b = 1$ (ii) $\log_b{}^1 = 0$ ( iii) $\log_b b^x = x$

**ಲಘುಗಣಕ ಧರ್ಮಗಳು :**

ಹೆಚ್ಚಿನ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ಗಣಿತದಲ್ಲಾಗಲಿ, ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಾಗಲಿ, ಇಂಜಿನೀರಿಂಗ್ ಮುಂತಾದವುಗಳಲ್ಲಿ ಲಘುಗಣಕಗಳ ಉಪಯೋಗವು ಅತ್ಯಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭ ಗಳಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವ ಲಘುಗಣಕಗಳ ಧರ್ಮಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಬಾರಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

**1) ಗುಣಾಕಾರ ಸೂತ್ರ**

ಘಾತಾಂಕ ನ್ಯಾಯಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಲಘುಗಣಕಗಳಿಗೂ ಕೂಡಾ ಕೆಲವು ಧರ್ಮಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ ಒಂದೇ ಪಾದ ಹೊಂದಿರುವ ಘಾತಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ, ಅವುಗಳ ಘಾತಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿ ಘಾತರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲಾ !

ಎಂದರೆ $a^x\ a^y = a^{x+y}$

ಮೇಲಿನ ಘಾತಾಂಕ ಧರ್ಮವನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ಲಘುಗಣಕ ಧರ್ಮದ ಗುಣಾಕಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು.

$a,\ x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳು ನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $a \neq 1$ ಆದರೆ $log_a xy = log_a x + log_a y$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಲಘುಗಣಕವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

$100000 = 1000 \times 100$ ಬರೆದು ಗುಣಾಕಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$log_{10}10000 = 5$ ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಲಘುಗಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $35 \times 46$ (ii) $235 \times 437$ (iii) $2437 \times 3568$

$a$, $x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳು ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $a \neq 1$ ಆದರೆ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

ಲಘು ಗಣಕಗಳ ಮೊದಲ ನಿಯಮದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಗಮನಿಸೋಣ.

$\log_a x = m$ ಮತ್ತು $\log_a y = n$ ಆಗಿರಲಿ

ಆಗ $a^m = x$ ಮತ್ತು $a^n = y$ ಆಗುವುದು (ಘಾತರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು)

ಇಲ್ಲಿ $xy = a^m.a^n = a^{m+n}$ (ಇದನ್ನು ಲಘುಗಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು)

$\log_a xy = m+n = \log_a x + \log_a y$ ಗಾ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

**ii) ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ :**

ಒಂದೇ ಪಾದ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಘಾತಗಳನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿದ್ದಾದರೆ, ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಿ ಘಾತರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂ ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲಾ ?

ಎಂದರೆ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

ಮೇಲಿನ ಘಾತಾಂಕ ನ್ಯಾಯದ ಮೇಲೆ ಲಘುಗಣಕದ ಭಾಗಾಕಾರ ನ್ಯಾಯವು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಭಾಗಾಕಾರದ ಸೂತ್ರ: $a$, $x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳು ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಇಲ್ಲಿ $a \neq 1$ ) ಆದರೆ $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಾಕಾರದ ಲಘುಗಣಕವು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

32ನ್ನು 64/2 ಎಂದು ಬರೆದು ಭಾಗಾಕಾರ ನ್ಯಾಯದಿಂದ $\log_2 32 = 5$ ಎಂದು ತಿಳಿದು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಲಘುಗಣಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. i) $\dfrac{23}{34}$ ii) $\dfrac{373}{275}$

iii) $4325 \div 3734$ iv) $5055 \div 3303$

**ಆಲೋಚಿಸಿ – ಚರ್ಚಿಸಿರಿ:**

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲಘುಗಣಕದಲ್ಲಿನ ಭಾಗಾಕಾರ ನ್ಯಾಯವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

### iii) ಘಾತಾಂಕ ನ್ಯಾಯ :

ಒಂದು ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಘಾತಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಎಂದರೆ $(a^m)^n = a^{m-n}$

ಮೇಲಿನ ಘಾತಾಂಕ ನ್ಯಾಯದಿಂದ ಲಘು ಗಣಕದಲ್ಲಿನ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

$a, x$ ಗಳು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $a \neq 0$ ಮತ್ತು $n$ ಯಾವುದಾದರು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $\log_a x^n = n \log_a x$ ಒಂದು ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಘುಗಣಕವು ಆ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತಾಂಕದಿಂದ ಆ ಲಘುಗಣಕದೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗುವುದು.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

$32 = 2^5$ ಬರೆದು ಘಾತಾಂಕ ನ್ಯಾಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\log_5 32 = 5$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಉತ್ತರವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

$2^x = 3^5$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ ? $3^5$ ಬೆಲೆಯನ್ನು 243 ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದು $x$ ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $2^x$ ನ ಬೆಲೆ 243 ಆಗುವುದೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $3^{25}.3^{33}$ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳಿದ್ದಾಗ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $\log_a x^n = n \log_a x$ ಎನ್ನುವ ನ್ಯಾಯವು ಸುಲಭವಾಗುವುದೇ ಅಲ್ಲವೇ ! $2^x = 3^5$ ಲಘುಗಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು $\log_2 3^5 = x$

$5 \log_2 3 = x \; (\log_a x^n = n\log_a x)$

ಎಂದರೆ $\log_2 3$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು 5 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲು $x$ ಬೆಲೆ ಬರವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

$\log_a x^n = n\log_a x$ ಎನ್ನುವ ನ್ಯಾಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

i) $\log_2 7^{25}$ ii) $\log_5 8^{50}$ iii) $\log 5^{23}$ iv) $\log 1024$

**ಆಲೋಚಿಸಿ - ಚರ್ಚಿಸಿರಿ :**

$\log \frac{x}{y} = \log(xy^{-1})$ ಬರೆದು $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ ಎಂದು ಲಬ್ಧ ಘಾತ ನ್ಯಾಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರೂಪಿಸುವೆಯಾ ?

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(i) \log_2 32$ $(ii) \log_c \sqrt{c}$ $(iii) \log_{10} 0.001$ $(iv) \log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64}$

**ಆಲೋಚಿಸಿ - ಚರ್ಚಿಸಿರಿ :**

$7=2^x$ ಆದರೆ $x = \log_2 7$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದರೆ $2^{\log_2 7}$ ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ. ಮೇಲಿನಿಂದ $a^{\log_a n}$ ನು ಯಾವ ರೀತಿಯಿಂದ ಸಾಧಾರಣೀಕರಿಸುವಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ -11** $\log \frac{343}{125}$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

$\log_a x^m = m \log_a x$ ಆದ್ದರಿಂದ

$= 3\log 7 - 3\log 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\log \frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$.

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ ನ್ನು ಒಂದೇ ಲಘುಗಣಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ ($m \log_a x = \log_a x^m$ ಆದ್ದರಿಂದ)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ ($\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ ಆದ್ದರಿಂದ)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \frac{1125}{32}$ ($\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ ಆದ್ದರಿಂದ)

**ಉದಾಹರಣೆ -13.** $3^x = 5^{x-2}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $x \log_{10} 3 = (x-2)\log_{10} 5$

$x \log_{10} 3 = x\log_{10} 5 - 2\log_{10} 5$

$x \log_{10} 5 - 2 \log_{10} 5 = x \log_{10} 3$

$x \log_{10} 5 - x \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 5$

$x (\log_{10} 5 - \log_{10} 3) = 2 \log_{10} 5$

$$x = \frac{2 \log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$$

**ಉದಾಹರಣೆ -14.** $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$ ಆದರೆ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**

$$\log x = 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$$

$$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log\sqrt{9} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log 3 - \log 3$$

$$\log x = \log 25$$

$$\therefore \quad x = 25$$

### ಅಭ್ಯಾಸ - 1.5

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\log_{25}5$ (ii) $\log_{81}3$ (iii) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ (iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x\sqrt{x}$

   (vi) $\log_2 512$ (vii) $\log_{10}0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ (ix) $2^{2+\log_2 3}$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಲಘುಗಣಕವಾಗಿ ಬರೆದು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log_2 16 - \log_2 2$ (iii) $3\log_{64} 4$

   (iv) $2\log 3 - 3\log 2$ (v) $\log 10 + 2\log 3 - \log 2$

3. $x = \log_2 3$ ಮತ್ತು $y = \log_2 5$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

   (i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $\log 1000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\frac{p^2q^3}{r}$ (v) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

5. $x^2 + y^2 = 25xy$ ಆದರೆ $2\log(x+y) = 3\log 3 + \log x + \log y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ ಆದರೆ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ ಆದರೆ $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $2^{x+1} = 3^{1-x}$ ಆದರೆ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. (i) $\log 2$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.
   (ii) $\log 100$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

[ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಉದ್ದೇಶಿಸಿರುವುದು ಅಲ್ಲ]

1. n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $6^n$ ನ ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 5 ಇರುತ್ತದೆಯೇ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

2. $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ ಎಂಬುದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

3. $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗುವುದೋ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗುವುದೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

4. $x^2 + y^2 = 6xy$ ಆದರೆ $2\log(x+y) = \log x + \log y + 3\log 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. $\log_{10} 2 = 0.3010$ ಆದರೆ $4^{2013}$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಂಕೆಗಳಿರುತ್ತವೆಯೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

**ಸೂಚನೆ :** ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಲಘುಗಣಕದಲ್ಲಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗ, ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗವನ್ನು ಕುರಿತು ನಿಮ್ಮ ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು ಕೇಳಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ :**

**ಯೂಕ್ಲೀಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ :- ಮ.ಸಾ.ಅ.**

★ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.(H.C.F)ವನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ (ಯೂಕ್ಲೀಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮದಂತೆ ಗ್ರಾಫ್ ಪೇಪರ್ ಗ್ರಿಡ್ ಪೇಪರ್‌ನಿಂದ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. **ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ**: “$a = bq + r$, $0 \leq r < b$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳ ಜೊತೆಗನುಗುಣವಾಗಿ $q$ ಮತ್ತು $r$ ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತವೆ.”

2. **ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ :** ಪ್ರತಿ ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ) ಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಈ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. $p$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $a$ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $a^2$ ನ್ನು $p$ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆಗ $a$ ನ್ನು $p$ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. .

4. $x$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ಆದಾಗ $x$ ನ್ನು $p$ ,$q$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹ–ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು $p$ ಮತ್ತು $q$ ಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $2^n5^m$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $n$, $m$ ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

5. $n$, $m$ ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $q$ ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪ $2^n5^m$ ಹೊಂದಿರುವಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $x = \frac{p}{q}$ ಆದರೆ, $x$ ನ ದಶಮಾಂಶರೂಪ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ಆಗುತ್ತದೆ.

6. $n$, $m$ ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $q$ ನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ $2^n5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $x = \frac{p}{q}$ ಆದರೆ, $x$ ನ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆದರೆ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವಾಗುತ್ತದೆ.

7. $a$ ಮತ್ತು $x$ ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 1$ ಆಗಿದ್ದು $a^n = x$ ಆದರೆ ನಾವು $\log_a x = n$ ಎಂದು ನಿರ್ವಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

8. ಲಘುಗಣಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು.

   (i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

   (iii) $\log_a x^m = m \log_a x$ (iv) $a^{\log_a N} = N$ (v) $\log_a 1 = 0$ (vi) $\log_a a = 1$

9. ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಗಣಿತ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಇಂಜನೀಯರಿಂಗ್, ಸೈನ್ಸ್, ವ್ಯಾಪಾರ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

# ಅಧ್ಯಾಯ 2

# ಗಣಗಳು
## (Sets)

### 2.1 ಪರಿಚಯ :

ನೀವು ಯಾರ ಕುರಿತಾದರು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಹೇಗೆ ಹೇಳುವಿರಿ ? ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೆ ?

ರಾಮಾನುಜನ್ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆತನು ಸಂಖ್ಯಾವಾದದ ಮೇಲೆ ವಿಶೇಷವಾದ ಕೃಷಿ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ.

ದಾಶರಥಿ ಒಬ್ಬ ಹೆಸರಾಂತ ತೆಲುಗು ಕವಿ ಮತ್ತು ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಹೋರಾಟಗಾರ. ಅಲ್ಬರ್ಟ್ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್, ಜರ್ಮನಿಯಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಇತನು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಆತನು ಸಂಗೀತದ ಅಭಿರುಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದವನು.

ಫೀಲ್ಡ್ ಮೆಡಲ್ ಹೊಂದಿದ ಮೊದಲ ಮಹಿಳಾ ಗಣಿತಜ್ಞ ''ಮಾರ್ಯಂ ಮೀರ್ಜಾಜ್ಞಾಖಾನ್''

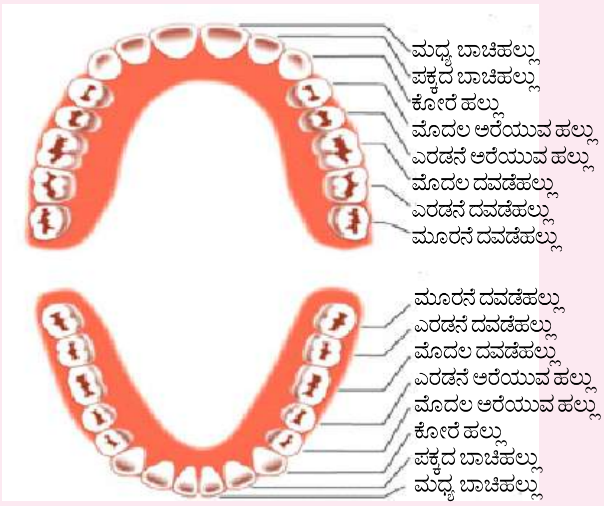
ನಾವು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅವರವರ ವಿಶೇಷವಾದ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅವರ ಅಭಿರುಚಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ತಿಳಿದ ಸಮಾಚಾರದ ಆದಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ.

**ದಂತ ಸೂತ್ರ :**

ಮಾನವನ ದಂತಗಳನ್ನು ಅವು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ 4 ವಿಧವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು.

1) ಬಾಚಿ ಹಲ್ಲುಗಳು 2) ಕೋರೆ ಹಲ್ಲುಗಳು
3) ಅರೆಯುವ ಹಲ್ಲುಗಳು 4) ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳು

ಒಟ್ಟು ದಂತ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ ಮತ್ತೆ ಈ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಎಡ ಬಲ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಒಟ್ಟು ದಂತ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.




ದಂತಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ವಿಧದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಾಚಿ ಹಲ್ಲುಗಳು, ಕೋರೆ ಹಲ್ಲುಗಳು, ಅರೆಯುವ ಹಲ್ಲುಗಳು ಮತ್ತು ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದನ್ನು ದಂತಸೂತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಈಗ ಮಾನವನ ದಂತ ಸೂತ್ರ 2, 1, 2, 3 ಆಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾದರೆ ಅವರವರ ಕ್ಷೇತ್ರರಂಗದಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರತಿಭೆ ಸೌರಭವಲ್ಲದೆ, ಅವರಿಗೆ ಕೆಲವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಅಭಿರುಚಿಗಳಿರುವವೆಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ವಿಶೇಷವಾದ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಅಭಿರುಚಿಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವರು ಯಾವ ರಂಗದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೋ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು, ಅವರವರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಅವರ ಅಭಿರುಚಿಯ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವರು ಯಾವ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರುವರು ಸುಲಭವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಗ್ರಂಥಾಲಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದಾದರೆ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು, ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವೆನಿಸಿದಾಗ ಸುಲಭವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಹಾಗೆ ಜೋಡಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂಲವಸ್ತುಗಳ ಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲವೆ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಮೂಲವಸ್ತುಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವರೆಂದು ನಾವು ಅರಿತಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ ?

ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತನೆ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಅಯಾ ಸಂಬಂಧಿತ ಪೀಠಿಕೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ !

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿ ಅಲ್ಲದೆ, ಶೇಖರಿಸಿದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಅರ್ಥವಂತಾದ ವಿಷಯಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಇದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಧರ್ಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುವುದು ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಅಂತಹ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಆಗಾಗ ಎದುರಾಗುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸುವ !

N = 1, 2, 3, .......... ಮುಂತಾದ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಂಪುಗಳು

W = 0, 1, 2, 3, ಎನ್ನುವ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪು

I ಇಲ್ಲವೆ Z = 0, $I^1$, $I^2$, $I^3$ ಎನ್ನುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪು Q= p, q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, $q \neq 0$ ಆಗುವಂತೆ p/q ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪು.

R = ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ) ಸಮೂಹ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಕೆಳಗಿನ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1) 2, 4, 6, 8 .... 2) 2, 3, 5, 7,11, ... 3) 1, 4, 9, 16 .....

4) ಜನವರಿ, ಫೆಬ್ರವರಿ, ಮಾರ್ಚ್, ಏಪ್ರಿಲ್, ......

5) ಹೆಬ್ಬೆರಳು, ತೋರ್ಬೆರಳು, ಮಧ್ಯಬೆರಳು, ಉಂಗುರದ ಬೆರಳು,ಕಿರುಬೆರಳು.

**ಆಲೋಚಿಸಿರಿ - ಚರ್ಚಿಸಿರಿ - ಬರೆಯಿರಿ.**

ಕೆಳಗಿನ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಮತ್ತಷ್ಟು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ?

1) 2, 4, 6, 8 .... 2) 1, 4, 9, 16 .....

## 2.2 ಗಣ ( SET) :

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳ ಗುಂಪೇ' ಒಂದು ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗಣಾಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಕಾಮಾ ( , ) ಗಳಿಂದ ಬೇರೆಮಾಡಿ, { } ಪುಷ್ಪಾವರಣಗಳಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಆಧಾರವಾಗಿಯೇ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಾವು, ಮೊದಲ ಐದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ, ಅದನ್ನು { 2, 3, 5, 7, 11} ಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಬಾಚಿ ಹಲ್ಲುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ { ಮಧ್ಯ ಬಾಚಿಹಲ್ಲು, ಪಕ್ಕದ ಬಾಚಿಹಲ್ಲು} ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1) ಮೊದಲ ಐದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

2) 100 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು 125 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ 5ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಗಣ.

3) ಮೊದಲ ಐದು ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

4) ರಾಮಾನುಜಮ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಗಣ.

### 2.2.1 ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿ ( Roster form) ಮತ್ತು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿ ( Set Builder form) :

ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ! ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ , ಇಂಗ್ಲೀಷಿನ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳು A, B, C, ... ಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ M ಎಂಬುದು ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳ ಗಣವಾದರೆ,

M = {ಮೊದಲನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು, ಎರಡನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು, ಮೂರನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು } ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

Q ಎಂಬುದು ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಗಣವಾದರೆ,

Q = {ಚೌಕ, ಆಯತ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಗಾಳಿ ಪಟಾಕೃತಿ, ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ, ಡಾರ್ಟ್} ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಗಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು 'ರೋಸ್ಟರ್ ಪದ್ಧತಿ' ಅಥವಾ 'ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ ಒಂದು ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ "ಎರಡನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು, ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಇರುವುದೆಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಎರಡನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು $\in$ M " ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ' ಎರಡನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು M ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆಂದು ' ಓದುತ್ತೇವೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ 'ಎರಡನೆ ದವಡೆ ಹಲ್ಲು belongs to M 'ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತೆ "ರಾಂಬಸ್ $\in$Q "ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಇದನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಓದುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಚೌಕ M ಗಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆಯೇ? ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ?

"ಚೌಕ M ಗಣದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ"ಎಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ 'ಚೌಕ $\notin$ M' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು 'ಚೌಕ M ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ'ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು 'ಚೌಕ does not belongs to M 'ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಓದಿದ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣಗಳನ್ನು ಗುರ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ N, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ Z, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ Q ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ R ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತವೆಯೋ? ಸೇರುವುದಿಲ್ಲವೋ? ನಿರ್ಣಯಿಸಿ. ಸರಿಯಾದ ಗುರ್ತುಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i) 1 | (ii) 0 | (iii) - 4 | (iv) $\frac{5}{6}$ | (v) $1.\bar{3}$ |
| (vi) $\sqrt{2}$ | (vii) 0.03 | (viii) $\sqrt{2}$ | (ix) $\pi$ | (x) $\sqrt{-4}$ |

## ಆಲೋಚಿಸಿ - ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣ ( Q )ವನ್ನು, ಅದರಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳಿಂದ ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಲ್ಲಿರೇ?

ಮೇಲಿನ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ನಡೆಸಿದ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ( Q )ದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದು ಕಷ್ಟ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0,\ p,\ q\ \in z)$ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಅರ್ಥವಂತವಾದದ್ದು ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. {2 ರಮೇಶ, ಜನವರಿ} ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಗಣ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವಿಲ್ಲ, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಅದನ್ನು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ "ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣ " ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದರೆ ಅದೇ "ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿ "( Set Builder form )ನಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಗುಣವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಸುವ ನಿಯಮದಿಂದ ಬರೆಯಬೇಕು. ಇದನ್ನು ನಾವು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ಗಮನಿಸೋಣ.

A ಎಂಬುದು 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಗಣ.

ಇದರ ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿ A = {3, 6, 9, 12, 15, 18} ಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು ಗಣ ನಿಯಮ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ $A = \{x : x$ ಎಂಬುದು 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ, $x < 20\}$ ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು $x$ ಗಣಾಂಶ 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಮತ್ತು 20 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ "$x$ :"ನ್ನು "$x$ such that" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನೀವು ಚರ್ಚಿಸಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ( Q ) ವನ್ನು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ

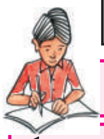
$Q = \{x : x = \frac{p}{q}, q \neq 0, p, q \in z\}$ ಎಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

***ಸೂಚನೆ*:** (i) ರಾಮಾನುಜಮ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಅದು $\{1, 7, 2, 9, \}$ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗಬಾರದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ "SCHOOL" ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಣವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಅದನ್ನು {S, C, H, O, L} ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಆದರೆ {S, C, H, O, O, L} ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಾರದು. ಏಕೆಂದರೆ ಗಣ ಎನ್ನುವುದು ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಮೂಹ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾದ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

| **ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿ** | **ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿ** |
|---|---|
| $V = \{a, e, i, o, u\}$ | $V = \{x :$ $x$ ಇಂಗ್ಲೀಷು ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಸ್ವರ$\}$ |
| $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ | $A = \{x : x - 2 \leq x \leq 2, x \in Z\}$ |
| $B = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ | $B = x : x = \frac{1}{n}, n \in N, n \leq 5$ |
| $C = \{2, 5, 10, 17\}$ | $C = \{x : x = n^2 + 1, n \in N, n \leq 4\}$ |



**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

1. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) G = ಎಂಬುದು 20ಕ್ಕೆ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನವೆಲ್ಲಾ ಹೊಂದಿದ ಗಣ.
   (ii) F = ಎಂಬುದು 17 ಮತ್ತು 61ನಡುವೆ ಇರುವ 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು ಮತ್ತು 7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ.
   (iii) $S = \{x : x$ ಎಂಬುದು 'MADAM' ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಣ$\}$
   (iv) $P = \{x : x$ ಎಂಬುದು 3.5 ಮತ್ತು 6.7 ನಡುವೆ ಇರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ$\}$
2. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ರೋಸ್ಟರ್ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) B ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಿಂಗಳಿಗೆ 30 ದಿನಗಳಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ತಿಂಗಳುಗಳ ಗಣ.
   (ii) P ಎಂಬುದು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.
   (iii) X ಎಂಬುದು ಕಾಮನ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಣ್ಣಗಳ ಗಣ.
3. A ಎಂಬುದು 12ಕ್ಕೆ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುವ ಗಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು A ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ.
   (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ನೀವೇ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಬರೆಯಿರಿ :
2. ರೋಸ್ಟರ್ ಪದ್ದತಿಯೊಂದಿಗೆ , ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

| | |
|---|---|
| (i) {p, r, i, n, c, a, l} | (a) $\{x : x$ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು 18ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದು$\}$ |
| (ii) {0} | (b) $\{x : x$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $x^2 - 9 = 0\}$ |
| (iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18} | (c) $\{x : x$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $x + 1 = 1\}$ |
| (iv) {3} | (d) $\{x : x$ ಎನ್ನುವುದು PRINCIPAL ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರ$\}$ |

## ಅಭ್ಯಾಸ : - 2.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗಣಗಳು ? ನಿಮ್ಮ ಸಮಾಧಾನವನ್ನು ನ್ಯಾಯವೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.
   (i) "J" ಎನ್ನುವ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ತಿಂಗಳುಗಳ ಗುಂಪು.
   (ii) ಭಾರತದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರತಿಭಾವಂತರಾದ 10 ಮಂದಿ ಬರಹಗಾರರ ಗುಂಪು.
   (iii) ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿರುವ 11 ಮಂದಿ ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಡುವಂತಹ 'ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮೆನ್'ಗಳ ಗುಂಪು.
   (iv) ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಲಕರ ಗುಂಪು.
   (v) ಎಲ್ಲಾ ಸರಿಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪು.
2. A={0, 2, 4, 6}, B = {3, 5, 7} ಮತ್ತು C = {p, q, r} ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ $\in$ ಅಥವಾ $\notin$ ಸೂಕ್ತವಾದ ಉತ್ತರದಿಂದ ತುಂಬಿರಿ.

| | | |
|---|---|---|
| (i) 0 ….. A | (ii) 3 ….. C | (iii) 4 ….. B |
| (iv) 8 ….. A | (v) p ….. C | (vi) 7 ….. B |

3. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಗುರ್ತುಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.
   (i) '$x$' ಎಂಬ ಗಣಾಂಶ 'A'ಗೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ.
   (ii) 'd' ಎನ್ನುವುದು 'B' ಗಣದ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ.
   (iii) '1' ಎನ್ನುವುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ Nಗೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.
   (iv) '8' ಎನ್ನುವುದು P ಎನ್ನುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ.

4. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ ? ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $5 \notin$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(ii) $S = \{5, 6, 7\} \Rightarrow 8 \in S$.

(iii) $-5 \notin W$ ,'W' ಗಣ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

(iv) $\frac{8}{11} \in Z$, 'Z' ಎನ್ನುವುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

5. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ರೋಸ್ಟರ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $B = \{x : x$ ಎಂಬುದು 6ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(ii) $C = \{x : x$ ಎಂಬುದು ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಎರಡಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ $8\}$.

(iii) $D = \{x : x$ ಎಂಬುದು 60ನ್ನು ಭಾಗಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$.

(iv) $E = \{ x : x$ ಎಂಬುದು BETTER ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಟ್ಟು ಅಕ್ಷರಗಳು$\}$.

6. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$

(iii) $\{5, 25, 125, 625\}$ (iv) $(1, 4, 9, 25, \ldots\ldots 100\}$

7. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ರೋಸ್ಟರ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $A = \{x : x$ ಎಂಬುದು 50 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ,100ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(ii) $B = \{x : x$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $x^2 = 4\}$

(iii) $D = \{x : x$ ಎಂಬುದು "LOYAL" ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರ$\}$

(iv) $E = \{x : x = 2n2 + 1, -3 \le n \le 3, n \in \mathbb{Z} \}$

8. ರೋಸ್ಟರ್ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ನಿಯಮ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\{1, 2, 3, 6\}$ (a) $\{x : x$ ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು 6ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.$\}$

(ii) $\{2, 3\}$ (b) $\{x : x$ಎಂಬುದು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(iii) {M, A, T, H, E, I, C, S} (c) $\{x : x$ ಎಂಬುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು 6ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.$\}$

(iv) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $\{x : x$ ಎನ್ನುವುದು MATHEMATICS ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರ$\}$

## 2.3 ಗಣಗಳು-ವಿಧಗಳು (Types of Set) :

ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

(i) $A = \{x : x$ ಎಂಬುದು 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(ii) $D = \{x : x$ ಎಂಬುದು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಬೆಸ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ$\}$

ಗಣ A, Dನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ ? 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ. ಯಾವುದೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ Aನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಗಣಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯಗಣ ಎನ್ನುವರು. A ಶೂನ್ಯಗಣ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಬೆಸ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ D ಸಹ ಶೂನ್ಯ ಗಣವೇ.

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಗಣವನ್ನು **ಶೂನ್ಯಗಣ ಅಥವಾ ಖಾಲಿ ಗಣ** ಎನ್ನುವರು. ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು $\phi$ ಅಥವಾ { } ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಕೆಳಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಶೂನ್ಯ ಗಣಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) A = $\{x : 1 < x < 2$, $x$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ}

(ii) B = $\{x : x^2 - 2 = 0$ ಮತ್ತು $x$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ}

(iii) D = $\{x : x^2 = 4$, $x$ ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ}

***ಸೂಚನೆ***: $\phi$ ಮತ್ತು {0} ಎರಡೂ ಕೂಡ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಣಗಳು. ಗಣ {0}ನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಇದೆ. { } ಶೂನ್ಯಗಣ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯ ಗಣಗಳು ಯಾವುವು ? ನಿನ್ನ ಉತ್ತರವನ್ನು ನ್ಯಾಯವೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

   (i) 2 ಮತ್ತು 3 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

   (ii) 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

   (iii) 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಬರುವ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಶೂನ್ಯ ಗಣಗಳು ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ನ್ಯಾಯವೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

   (i) A = $\{x : x^2 = 4$ ಮತ್ತು $3x = 9\}$.

   (ii) ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಟ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180^0$ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣ.

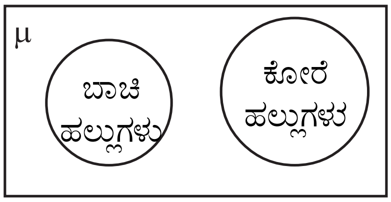
## 2.5 ವಿಶ್ವಗಣ ಮತ್ತು ಉಪಗಣ (Universal Set and Subsets)

ನೀವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ದಂತ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಒಂದು ಗಣವಾಗಿ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಒಟ್ಟು ದಂತ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಬಾಚಿ ಹಲ್ಲುಗಳು, ಕೋರೆ ಹಲ್ಲುಗಳು, ಅರೆಯುವ ಹಲ್ಲುಗಳು, ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳು ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಗಣಗಳಾಗಿ ಮತ್ತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ

ಒಟ್ಟು ದಂತ ವಿನ್ಯಾಸ ಗಣ

| | |
|---|---|
| ಬಾಚಿ ಹಲ್ಲುಗಳು | ಕೋರೆ ಹಲ್ಲುಗಳು |
| ಅರೆಯುವ ಹಲ್ಲುಗಳು | ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳು |

ದವಡೆ ಹಲ್ಲುಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ದಂತ ಒಟ್ಟು ದಂತ ವಿನ್ಯಾಸ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆಯೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ದಂತ ವಿನ್ಯಾಸ ಗಣವನ್ನು ಈ ನಾಲ್ಕು ದಂತಗಳ ಗಣಗಳಿಗೆ ವಿಶ್ವಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಟ್ಟು ದಂತ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿಶ್ವಗಣವಾಗಿ ಭಾವಿಸಿದರೆ ಬಾಚಿ ಹಲ್ಲುಗಳು, ಕೋರೆ ಹಲ್ಲುಗಳು ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ ಇದನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ ಸಹ ತೋರಿಸಬಹುದು.




ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ . ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಖಾಳಿ ಭಾಗ ಯಾವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ?

ವಿಶ್ವ ಗಣಕ್ಕೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನೋಡೋಣ.

(i) ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ವಿಧಧ, ಪ್ರಜೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕೆಂದರೆ, ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಜೆಗಳೆಲ್ಲರೂ ವಿಶ್ವ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತಾರೆ.

(ii) ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವಿಧಧ, ಪ್ರಜೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕೆಂದರೆ ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಪ್ರಜೆಗಳೆಲ್ಲರೂ ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗುತ್ತಾರೆ.

ವಿಶ್ವ ಗಣವನ್ನು'U' ಅಥವಾ'μ' ನಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಆಯತಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ 'μ' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು ಅಲ್ಲವೇ! ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ N ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ N ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ?

ಮತ್ತೊಂದು ಗಣ $A = \{1, 2, 3\}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಾಧ್ಯವಾದ ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಗಣಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಲ್ಲೆವು?

ಈಗ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$ ಮತ್ತು $\{1, 2, 3\}$ ಗಣಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಹುದು ಅಲ್ಲವೇ! ಇವಲ್ಲದೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಈ ಗಣಗಳೆಲ್ಲವುಗಳನ್ನು A ನ **ಉಪಗಣಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $\{1, 2\}$ ಎಂಬುವುದು A ಗಣದ ಉಪಗಣವಾದರೆ $\{1, 2\} \subseteq A$ ಯಾಗಿ ಬರೆದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಉಪಗಣಗಳಲ್ಲಿ $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ಮೊದಲಾದವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಹ $\{1, 2, 3\}$ ನ್ನು ಸಹ A ನ ಉಪಗಣವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ..

ಗಣ A ನ ಗಣಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಇಲ್ಲವೇ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು ಗಣ B ನಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು ಆದರೆ B ನ್ನು A ನ ಉಪಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $B \subseteq A$ ಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

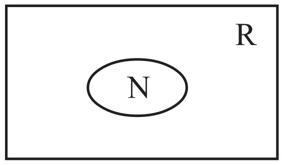
1. "$x < 3$ ಆದರೆ $x < 4$ ಆಗುತ್ತದೆ." ಇದನ್ನು "$x < 3 \Rightarrow x < 4$" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.
2. "$x - 2 = 5$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರವೇ $x = 4$ ಆಗುತ್ತದೆ." ಇದನ್ನು "$x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, ಗಣ B ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ ಗಣ A ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗಲೇ **if and only if** ("iff") $B \subseteq A$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳು A, B ಗಳಿಗೆ $B \subseteq A \Leftrightarrow a \in B \Rightarrow a \in A$ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಸೂಚನೆ :** ಶೂನ್ಯಗಣ $\phi$ ಪ್ರತಿ ಗಣಕ್ಕೆ ಉಪಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣ R ಗೆ ಬಹಳ ಉಪಗಣಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ




ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ $Z = \{\ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots..\}$

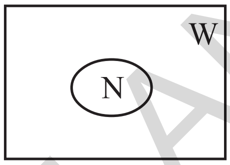
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣ $Q^1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $Q^1 = \{x : x \in R$ ಮತ್ತು $x \notin Q\}$. ಅಂದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

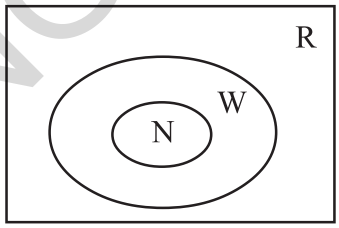
ಉದಾ : $\sqrt{2}$ , $\sqrt{5}$ ಮತ್ತು ಠ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಣ N ಎನ್ನುವುದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ W ಗೆ ಉಪಗಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ $N \subseteq W$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು W, Rಗೆ ಉಪಗಣ

i.e., $N \subseteq W$ ಮತ್ತು $W \subseteq R$

$\Rightarrow \quad N \subseteq W \subseteq R$




ಕೆಲವು ಉಪಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಂಬಂಧಗಳು ನೋಡಿದರೆ

$N \subset Z \subset Q$, $Q \subset R$, $Q^1 \subset R$, ಮತ್ತು $N \not\subset Q^1$.

ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿನ ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳ ಗಣ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $V = \{a, e, i, o, u\}$. ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳೆನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಗಣವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $A = \{a, b, c, d, \ldots.., z\}$. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಗಣ ಮತ್ತು ಉಪಗಣವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಗಣ V ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ Aಗೆ ಸಹ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಗಣ Aನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ ಗಣ Vನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ V, ಗಣ A ಗೆ ಉಪಗಣ ಮತ್ತು $V \subset A$, , ಅಂದರೆ $a \in V$ ಆದಾಗ $a \in A$ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $F = \{\ \}$.

   ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು $\subset$ ಅಥವಾ $\not\subset$ ಗಳಿಂದ ತುಂಬಿರಿ.

   (i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A

   (iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) $\phi$ ….. B

2. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವಾದವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

   (i) $\{\ \} = \phi$ (ii) $\phi = 0$ (iii) $0 = \{0\}$

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

1. $A = \{$ಚತುರ್ಭುಜಗಳು$\}$, $B = \{$ಚೌಕ, ಆಯತ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ, ವಜ್ರಾಕೃತಿ$\}$

   $A \subset B$ ಅಥವಾ $B \subset A$ ಆಗುವುದೇನೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರ ನ್ಯಾಯವೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

2. $A = \{a, b, c, d\}$ ಆದರೆ A ನ ಎಲ್ಲ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. P ಎನ್ನುವುದು 5 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ. Q ಎನ್ನುವುದು 25 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ. R ಎನ್ನುವುದು 125ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಅಸತ್ಯ.

   (A) $P \subset Q$ (B) $Q \subset R$ (C) $R \subset P$ (D) $P \subset R$

4. A ಎನ್ನುವುದು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. B ಎನ್ನುವುದು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು C ಎನ್ನುವುದು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸತ್ಯವಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ?

   (i) $A \subset B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset C$

   (iv) $C \subset A$ (v) $B \subset C$ (vi) $\phi \subset A$

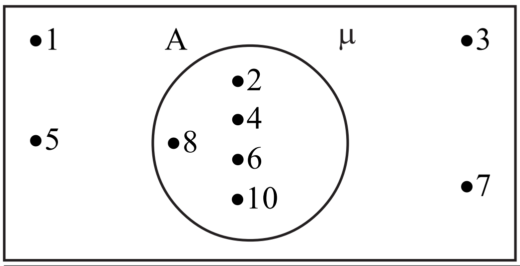
$\phi$ ಗಣವು ಮತ್ತು A ಶೂನ್ಯ ತರಗಣ. ಆದರೂ $\phi$ ಗಣವು A ಗಣಕ್ಕೆ ಉಪಗಣ ಆಗುತ್ತದೆಯೆ ? ಇಲ್ಲವೆಂದಲ್ಲಿ $\phi$ ದಲ್ಲಿ A ನ ಯಾವುದಾದರು ಗಣಾಂಶಗಳು ಇರಬೇಕು. $\phi$ ಶೂನ್ಯಗಣ ಇರುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಏನು ಗಣಾಂಶಗಳಿಲ್ಲ $\phi$ CA. ಶೂನ್ಯ ಗಣವು ಪ್ರತಿ ಗಣಕ್ಕೂ ಉಪಗಣ. ACA ಆಗುತ್ತದೆಯೇ ? ಎಡಕ್ಕ ಇರುವ A ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ ಬಲಕ್ಕಿರು A ನಲ್ಲಿವೆ ಅದಕ್ಕಾಗಿ ACA ಪ್ರತಿ ಗಣವು ಅದಕ್ಕೆ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

## 2.6 ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳು (VENN DIAGRAMS) :

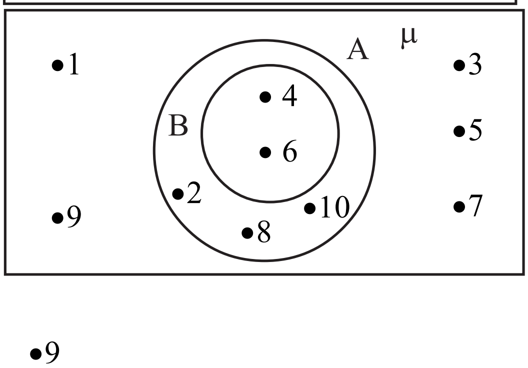
ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ಗಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕೆಲವು ವಿಧವಾದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇನ್ನೂ ವಿವರವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ. ಗಣಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಆಯಿಲರ್ ಅಥವಾ ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳು ಮತ್ತು ಆವೃತ ವಕ್ರಗಳು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ಸೂಚಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ, ವಿಶ್ವಗಣ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

(i) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ವಿಶ್ವಗಣ ಎಂದು, ಇದರಲ್ಲಿ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ಗಣ ವಿಶ್ವಗಣಕ್ಕೆ ಉಪಗಣವಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

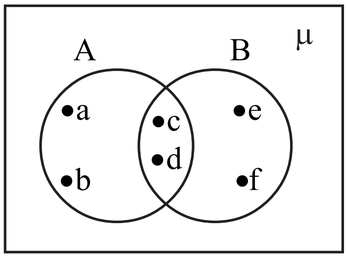



(ii) $\mu = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ವಿಶ್ವಗಣ, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ಮತ್ತು $B = \{4, 6\}$ ಗಳು ಉಪಗಣಗಳು ಮತ್ತು $B \subset A$. ಆದರೆ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಮೇಲಿನವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



(iii) A = {a, b, c, d} ಮತ್ತು B = {c, d, e, f}.

ನಾವು ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.




## 2.8 ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (Basic Operations on Sets) :

ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೇಗಳಾದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿವೆ. ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ, ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಹೊಸ ಗಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತ ಗಣಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಅಂದರೆ ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ, ಗಣಗಳ ಛೇದನ, ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

### 2.8.1 ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ (Union of Sets) :

**ಉದಾಹರಣೆ -2.** ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಗಳವಾರ ಪಾಠಶಾಲೆಗೆ ಹಾಜರಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಗಣ A ಎಂದು, ಬುಧವಾರ ಹಾಜರಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ B ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಪರಿಹಾರ** A = {ರೋಜ, ರಾಮು, ರವಿ} ಮತ್ತು

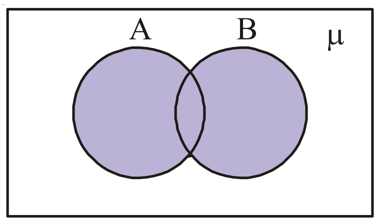
B = {ರಾಮು, ಪ್ರೀತಿ, ಹನೀಫ್}

ಈಗ ನಾವು ಮಂಗಳವಾರ ಅಥವಾ ಬುಧವಾರ ಪಾಠಶಾಲೆಗೆ ಹಾಜರಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು K, ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಆಗ ರೋಜ $\in$ K ಆಗುವುದೇ ? ರಾಮು $\in$ K ಆಗುವುದೇ ? ರವಿ $\in$ K ಆಗುವುದೇ ? ಹನೀಫ್ $\in$ K ಆಗುವುದೇ? ಪ್ರೀತಿ $\in$ K ಆಗುವುದೇ ? ಅಖಿಲ $\in$ K ಆಗುವುದೇ ?

ರೋಜ, ರಾಮು, ರವಿ, ಹನಿಫ್ ಮತ್ತು ಪ್ರೀತಿ ಎಲ್ಲರೂ K ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಅಖಿಲ K ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, K = {ರೋಜ, ರಾಮು, ರಹೀಂ, ಪೃಥ್ವಿ}

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು Kನ್ನು A, B ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ ಎನ್ನುವರು. A, B ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವೆಂದರೆ A ಗೆ ಸೇರಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು, ಅಥವಾ B ಗೆ ಸೇರಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಗಣಗಳಿಗೆ ಸೇರಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ ಎಂದರ್ಥ. ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು 'μ' ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.




ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳಿಂದ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಛಾಯೆ ಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶ)

ಸಂಕೇತವಾಗಿ $A \cup B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾ 'A ಯೂನಿಯನ್ B' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

$A \cup B = \{x : x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$

**ಉದಾಹರಣೆ-1.** $A = \{2, 5, 6, 8\}$ ಮತ್ತು $B = \{5, 7, 9, 1\}$. ಆದರೆ $A \cup B$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A \cup B$ ಬರೆಯುವಾಗ A,B ಗಣಗಳಲ್ಲಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶವಾದ 5ನ್ನು ಒಂದೇ ಬಾರಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** $A = \{a, e, i, o, u\}$ ಮತ್ತು $B = \{a, i, u\}$ ಆದರೆ $A \cup B = A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ಗಣ A ಮತ್ತು ಅದರ ಉಪಗಣ B ಗಳ ಸಂಯೋಗ ಗಣ A ಆಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $B \subset A$, ಆದರೆ $A \cup B = A$.

**ಉದಾಹರಣೆ-3.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ಮತ್ತು $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ಆದರೆ $A \cup B$ ಯನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳಿಂದ ವಿವರಿಸಿರಿ.

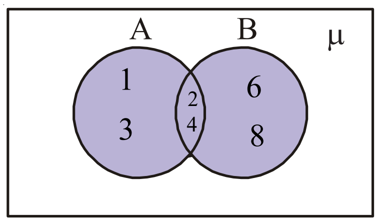
**ಪರಿಹಾರ :** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ಮತ್ತು $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ಆದರೆ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$



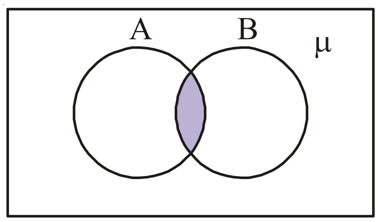

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

## 2.8.2 ಗಣಗಳ ಛೇದನ (INTERSECTION OF SETS) :

ಮತ್ತೊಂದು ಸಾರಿ ತರಗತಿಗೆ ಹಾಜರಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಬಾರಿ ನಾವು ಮಂಗಳವಾರ ಮತ್ತು ಬುಧವಾರಗಳಲ್ಲೂ ಹಾಜರಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ L ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

L = {ರಾಮು} ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ L ನ್ನು A, B ಗಣಗಳ ಛೇದನ ಎನ್ನುವರು.




$A \cap B$

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ, ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ B ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು A, B ಗಣಗಳ ಛೇದನ ಎನ್ನುವರು. ಅಂದರೆ ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ Bಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ನಾವು $A \cap B$. ("A ಇಂಟರ್‌ಸೆಕ್ಷನ್ B" ಅಥವಾ "A ಛೇದನ B" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$A \cap B = \{x : x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, A, B ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗವು $A \cap B$ ಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

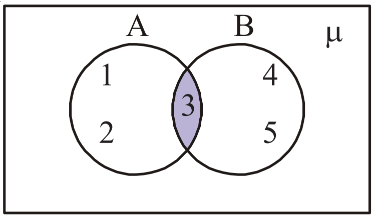
**ಉದಾಹರಣೆ -4.** $A = \{5, 6, 7, 8\}$ ಮತ್ತು $B = \{7, 8, 9, 10\}$ ಆದರೆ $A \cap B$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಗಣ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳು 7, 8.

$\therefore A \cap B = \{7, 8\}$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳು)

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** $A = \{1, 2, 3\}$ ಮತ್ತು $B = \{3, 4, 5\}$ ಆದರೆ $A \cap B$ ನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

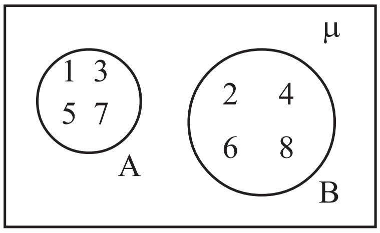
**ಪರಿಹಾರ :** A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.




$A \cap B = \{3\}$

## 2.8 ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು (DISJOINT SET) :

$A \{1, 3, 5, 7\}$ ಮತ್ತು $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ಅಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ B ನಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳು ಇಲ್ಲವೆಂದು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು. ಅಂತಹ ಗಣಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುವರು. ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳನ್ನು ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿದೆ.




$A \cap B = \phi$

A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಾಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $A \cap B = \phi$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ಮತ್ತು $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ಆದರೆ $A \cap B$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $A = \{6, 9, 11\}$; $B = \{ \}$ ಆದರೆ $A \cup \phi$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$ $A \cap B$ ಕಂಡು ಹಿಡಿದು $A \cap B = B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
4. $A = \{4, 5, 6\}$; $B = \{7, 8\}$ ಆದರೆ $A \cup B = B \cup A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. $A = \{2, 3, 5\}$ ಆದರೆ $A \cup \phi$ ಮತ್ತು $\phi \cup A$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಫಲಿತಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನು ಹೇಳುವಿರಿ.
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ಆದರೆ $A \cup B$, $A \cap B$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಫಲಿತದಿಂದ ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. A,Bಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿರಿ - ಚರ್ಚಿಸಿರಿ - ಬರೆಯಿರಿ.**

ಯಾವುದಾರೂ ಎರಡು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳ ಛೇದನ ಶೂನ್ಯ ಗಣವಾಗುವುದು. ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯವೋ? ಅಸತ್ಯವೋ?

### 2.8.4 ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Difference of Sets) :

ಗಣ A ಎನ್ನುವುದು 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ. ಗಣ B ಯನ್ನು 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಎನ್ನುವುದು A ಗೆ ಸೇರಿ, B ಗೆ ಸೇರದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಇದನ್ನು $A - B$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯುವರು.

$A - B$ = 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ಗಣ A ಗೆ ಮಾತ್ರವೆ ಸೇರಿ B ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರದೆ ಇರುವ ಗಣಾಂಶಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಗಣಕ್ಕೆ A, B ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುವರು.

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ಆದರೆ $A - B$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ಮತ್ತು $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. A ಗಣಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರವೇ ಸೇರಿ, ಗಣ Bಗೆ ಸೇರಿರದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

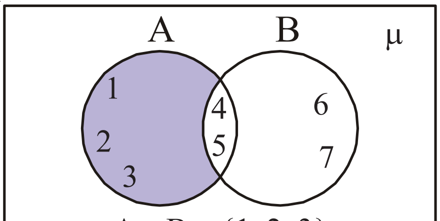
$\therefore A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$ ($\because$ 4, 5 ಗಣಾಂಶಗಳು Bನಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿಲ್ಲ.)

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $B - A$ ಅಂದರೆ B ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

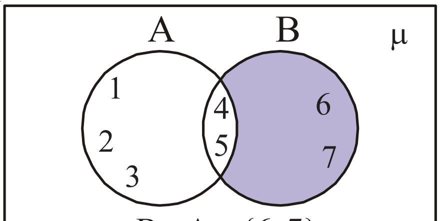
$\therefore B - A = \{6, 7\}$ (4, 5 ಗಣಾಂಶಗಳು A ನಲ್ಲಿವೆ).

$A - B \neq B - A$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.

A-B ಗಳ ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



$A - B = \{1, 2, 3\}$



$B - A = \{6, 7\}$

**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ಆದರೆ $A - B$ ಮತ್ತು $B - A$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. $A - B$, $B - A$ ಗಳು ಎರಡೂ ಸಮಾನವೇ ?
2. $V = \{a, e, i, o, u\}$ ಮತ್ತು $B = \{a, i, k, u\}$ ಆದರೆ $V - B$ ಮತ್ತು $B - V$.

**ಆಲೋಚಿಸಿರಿ - ಚರ್ಚಿಸಿರಿ - ಬರೆಯಿರಿ.**

ಗಣಗಳು $A - B$, $B - A$ ಮತ್ತು $A \cap B$ ಪರಸ್ಪರ ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಸತ್ಯವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.2

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ ಆದರೆ $A \cap B$ ಮತ್ತು $B \cap A$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎರಡೂ ಸಮಾನವೇ ?
2. $A = \{0, 2, 4\}$, $A \cap \phi$ ಮತ್ತು $A \cap A$ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.
3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ಮತ್ತು $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ಆದರೆ $A - B$ ಮತ್ತು $B - A$ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. A ಮತ್ತು Bಗಳು ಎರಡು ಗಣಗಳು. $A \subset B$ ಆದರೆ $A \cup B$ ಎಷ್ಟು ?
5. $A = \{x : x$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

   $B = \{x : x$ ಒಂದು ಸರಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

   $C = \{x : x$ ಒಂದು ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

   $D = \{x : x$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D.$
6. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

   $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; $D = \{5, 10, 15, 20\}$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) A – B (ii) A – C (iii) A – D (iv) B – A (v) C – A

(vi) D – A (vii) B – C (viii) B – D (ix) C – B (x) D – B

7. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವು ನ್ಯಾಯವೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(i) {2, 3, 4, 5} ಮತ್ತು {3, 6} ಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು.

(ii) {a, e, i, o, u} ಮತ್ತು {a, b, c, d} ಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು.

(iii) {2, 6, 10, 14} ಮತ್ತು {3, 7, 11, 15} ಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು.

(iv) {2, 6, 10} ಮತ್ತು {3, 7, 11} ಗಳು ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು.

### 2.6.1 ಸಮ ಗಣಗಳು (Equal Sets) :

ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

A = {ಸಚಿನ್ , ದ್ರಾವಿಡ್, ಕೋಹ್ಲಿ}

B = {ದ್ರಾವಿಡ್, ಸಚಿನ್, ಧೋನಿ }

C = {ಕೋಹ್ಲಿ, ದ್ರಾವಿಡ್, ಸಚಿನ್ }

ಗಣಗಳು A, B ಮತ್ತು Cಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೀರಿ ? ಗಣ A ನಲ್ಲಿರುವ ಆಟಗಾರರೆಲ್ಲರೂ ಗಣ Cನಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಗಣ Bನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಗಣ A ಮತ್ತು C ನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ ಆದರೆ ಗಣ A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಗಳು A ಮತ್ತು C ಗಳು ಸಮ ಗಣಗಳು. ಆದರೆ ಗಣಗಳು A , B ಗಳು ಸಮಗಣಗಳಲ್ಲ.

ಎರಡು ಗಣಗಳು A ಮತ್ತು C ಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ A ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ C ನಲ್ಲಿರಬೇಕು ( i.e. $A \subseteq C$) . ಹಾಗೆಯೇ C ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ A ನಲ್ಲಿರಬೇಕು ( i.e. $C \subseteq A$ )

A ಮತ್ತು C ಗಳು ಸಮಗಣಗಳಾದರೆ A = C ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದರಿಂದ ನಾವು $C \subseteq A$ ಮತ್ತು $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $\Leftrightarrow$ ಗುರ್ತು ಎರಡೂ ಕಡೆಗೂ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು **if and only if** ("iff") ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಗಣಗಳು A, C ಗಳು ಒಂದೇ ಗಣಾಂಶಗಳು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅವು ಸಮ ಗಣಗಳು A = C. ಹಾಗೆಯ್ನೇ ಇದನ್ನಿಡಿದು ಪ್ರತಿ ಗಣ ಅದಕ್ಕದೇ ಉಪಗಣ ಆಗುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -7.** ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

A = {p, q, r} B = {q, p, r}

ಮೇಲಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ A ಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ Bನಲ್ಲಿ ಸಹ ಇದೆ. $\therefore A \subseteq B$.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಗಣ Bಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ Aನಲ್ಲಿ ಸಹ ಇದೆ $\therefore B \subseteq A$.

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** A = {1, 2, 3, ….} ಮತ್ತು N ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣ. ಆದರೆ A ಮತ್ತು N ಗಳು ಸಮಾನವಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು N ಗಣಗಳು ಎರಡು ಸಹ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣಗಳೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ N ಗಳು ಸಮಾನ. A = N.

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** ಗಣಗಳು A = {1, 2, 3} ಮತ್ತು B = {1, 2, 3, 4} ಗಳು ಸಮಾನವೇ ?

**ಪರಿಹಾರ :** $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$ ಆದರೆ $A \neq B$.

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** 6ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು A ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು 30 ಕ್ಕೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇರುವ ಗಣವನ್ನು P ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. A ಮತ್ತು P ಗಳು ಸಮಾನವೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 6ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $A = \{2,3,5\}$

30 ಕ್ಕೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು 2, 3, ಮತ್ತು 5 ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ $P = \{2,3,5\}$

ಗಣ A ಮತ್ತು P ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು P ಸಮ.

**ಉದಾಹರಣೆ -11.** $A = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು 'ASSASSINATION' ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರ $\}$

$B = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು STATION ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರ $\}$

ಆದಾಗ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳು ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $A = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು 'ASSASSINATION' ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರ $\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಗಣ A ಯನ್ನು ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. $A = \{A,S,I,N,T,O\}$, ಏಕೆಂದರೆ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳು ಮತ್ತೇ, ಮತ್ತೇ ಬರೆಯಬಾರದು.

$B = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು STATION ಎನ್ನುವ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರ $\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$B = \{A,S,I,N,T,O\}$ ಎಂದು ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಯಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳು ಸಮಾನ $A = B$. , $A \subseteq B$ $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** $\phi$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ಗಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕೆಳಗೆ ಪ್ರತಿ ಗಣಗಳ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ $\subset$ ಅಥವಾ $\not\subset$ ಗುರ್ತನ್ನು ಇಡಿರಿ.

(i) $\phi$ ........ B (ii) A ........ B (iii) A ........C (iv) B ........ C

**ಪರಿಹಾರ :** (i) $\phi \subset B$ ಏಕೆಂದರೆ ಶೂನ್ಯ ಗಣ ಪ್ರತಿ ಗಣಕ್ಕೆ ಉಪಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

(ii) $\phi \not\subset B$ ಏಕೆಂದರೆ $3 \in A$ ಆದರೆ $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$, ಏಕೆಂದರೆ A ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ C ನಲ್ಲಿ ಸಹ ಇದೆ.

(iv) $B \subset C$, ಏಕೆಂದರೆ B ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ C ನಲ್ಲಿ ಸಹ ಇದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಗಣಗಳು ಯಾವುವು ?

   (i) $A = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು FOLLOW ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರ $\}$

   (ii) $B = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು FLOW ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರ $\}$

   (iii) $C = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು WOLF ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅಕ್ಷರ $\}$

2. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ = ಅಥವಾ $\neq$ ಗಳಿಂದ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

   $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{$ಮೊದಲ ಮೂರು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು$\}$

   $C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{d, c, a, b\}$

   $E = \{a, e, i, o, u\}$; $F = \{$ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿನ ಸ್ವರಾಕ್ಷಗಳ ಗಣ$\}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (i) | A ···· B | (ii) | A ···· E | (iii) | C ···· D |
| (iv) | D ···· F | (v) | F ···· A | (vi) | D ···· E |
| (vii) | F ···· B | | | | |

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ಗಣದಲ್ಲಿ A = B ಆಗುವುದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) A = {a, b, c, d} B = {d, c, a, b}

(ii) A = {4, 8, 12, 16} B = {8, 4, 16, 18}

(iii) A = {2, 4, 6, 8, 10} B = {$x$ : $x$ ಒಂದು ಧನ ಸರಿಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $x \leq 10$}

(iv) A = {$x$ : $x$,10 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ} B = {10, 15, 20, 25, 30, …}

4. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) {1, 2, 3, …., 10} $\neq$ {$x$ : $x \in$ N ಮತ್ತು $1 < x < 10$}

(ii) {2, 4, 6, 8, 10} $\neq$ {$x$ : $x$ = 2n+1 ಮತ್ತು $x \in$ N}

(iii) {5, 15, 30, 45} $\neq$ {$x$ : $x$ ,15ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ }

(iv) {2, 3, 5, 7, 9} $\neq$ {$x$ : $x$ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ}

5. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) B = {p, q} (ii) C = {x, y, z} (iii) D = {a, b, c, d}

(iv) E = {1, 4, 9, 16} (v) F = {10, 100, 1000}

**ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳು (Finite sets and Infinite sets) :**

ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

(i) A = {ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು} (ii) L = {p,q,r,s}

(iii) B = {$x$ : $x$ ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ} (iv) J = {$x$ : $x$, 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ}

ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಪ್ರತಿ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೀನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆಯೇ? (i)ರಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿನ್ನ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರೂ ಆಗುವರು. (ii) ರಲ್ಲಿ ಗಣ Lರಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4. ಇದರಿಂದ ಗಣ A ಮತ್ತು L ಗಣಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು ಅಲ್ಲವೇ! ಏಕೆಂದರೆ A ಮತ್ತು L ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ, ಇಂತಹ ಗಣಗಳನ್ನು **ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೆನ್ನುವರು.**

ಈಗ (iii) ಗಣ B ನಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಂತಾದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿವೆ. B ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಬಲ್ಲೆವೆ. ಅಂದರೆ ಗಣ Bನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪರಿಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ, ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ J ನಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಹ ಎಣಿಸಲಾರೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ B ಮತ್ತು ಗಣ J ನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮಿತ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ, ಇಂತಹ ಗಣಗಳನ್ನು **ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೆನ್ನುವರು.**

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಾವು ಅನಂತ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆದರೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಗಣ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗದಿದ್ದರೆ ಅದು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

(i) ವಾರದಲ್ಲಿನ ದಿನಗಳ ಗಣ 'W' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ W ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) $x^2 - 16 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಬೆಲೆ ಗಣ 'S' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ S ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವನ್ನು 'G' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ G ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-13.** ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೋ, ಅಥವಾ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\{x : x \in N$ ಮತ್ತು $(x-1)(x-2) = 0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ ಮತ್ತು $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ ಮತ್ತು $2x - 2 = 0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ ಮತ್ತು $x$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(v) $\{x : x \in N$ ಮತ್ತು $x$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ$\}$

**ಪರಿಹಾರ :**

(i) ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $x$ಗೆ ಸಾಧನೆ 1 ಅಥವಾ 2 ಆದ್ದರಿಂದ $\{1,2\}$ ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಪರಿಮಿತ ಗಣ.

(ii) $x^2 = 4$, ಅಂದರೆ $x = +2$ ಅಥವಾ $-2$. ಆದರೆ $x \in N$ ಅಥವಾ x ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ $\{2\}$ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ಇದು ಸಹ ಪರಿಮಿತ ಗಣವೇ.

(iii) ದತ್ತ ಗಣ $x = 1$ ಆದರೆ $1 \in N$ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಹ ಪರಿಮಿತ ಗಣ.

(iv) ದತ್ತ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾಂತ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಗಣ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ.

(v) ದತ್ತ ಗಣದಲ್ಲಿ ಅಸಂಖ್ಯಾಂತವಾದ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಗಣ ಸಹ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವೇ.

ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಕಾರ್ಡಿನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ :

ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x$ ಎನ್ನುವುದು "INDIA" ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರ$\}$

ಇಲ್ಲಿ,

ಗಣ Aನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3.

ಗಣ Bನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5.

ಗಣ Cನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4 (ಗಣ C ನಲ್ಲಿ 'I' ಗಣಾಂಶ ಎರಡು ಬಾರಿ ಬಂದಿದೆ. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರಬೇಕೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ C ನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗುತ್ತದೆ).

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದನ್ನು ಆ ಗಣದ **ಮೂಲಾಂಕ** (Cardinal Number) ಎನ್ನುವರು. ಗಣ A ಯ ಕಾರ್ಡಿನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $n(A) = 3$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $n(B) = 5$ ಮತ್ತು $n(C) = 4$.

ಒಂದು ಗಣದ ಮೂಲಾಂಕ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಆ ಗಣ ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

***ಸೂಚನೆ*** **:** ಶೂನ್ಯ ಗಣದಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಶೂನ್ಯಗಣದ ಮೂಲಾಂಕ 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ n(\phi) = 0$$

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ :

1. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೋ, ಯಾವುವು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿನ್ನ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
   (i) A = $\{x : x \in$ N ಮತ್ತು $x < 100\}$ (ii) B = $\{x : x \in$ N ಮತ್ತು $x \leq 5\}$
   (iii) C = $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots..\}$ (iv) D = $\{1, 2, 3, 4\}$
   (v) $\{x : x$ ವಾರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ದಿನ $\}$.
2. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.
   (A) 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ (B) 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ
   (C) 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ (D) 10ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗಣ.

## ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :

ಶೂನ್ಯಗಣ ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಾಕ್ಯ ಸತ್ಯವೋ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವೋ ? ಏಕೆ ?

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಶೂನ್ಯ ಗಣಗಳೋ ಯಾವುವು ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.
   (i) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಗಣ.
   (ii) 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.
   (iii) $\{x : x$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ , $x < 5$ ಮತ್ತು $x > 7\}$
   (iv) $\{x : x$ ಯಾವುದಾದರು ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಬಿಂದುವು$\}$
   (v) ಸರಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೋ, ಯಾವುವು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.
   (i) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ತಿಂಗಳುಗಳ ಗಣ
   (ii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$
   (iii) 99ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.
   (iv) ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಣ.
   (v) X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ರೇಖೆಗಳ ಗಣ.
   (vi) 5 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಗಣ.
   (vii) (0, 0) ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ವೃತ್ತಗಳ ಗಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -14.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ಆದರೆ $n(A \cup B)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಗಣ A ನಲ್ಲಿ ಐದು ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ. $\therefore n(A) = 5$

ಮತ್ತು ಗಣ B ನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ $\therefore n(B) = 4$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂಬತ್ತು ಗಣಾಂಶಗಳು ಇರಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಏಳು ಗಣಾಂಶಗಳೇ ಇವೆ ಅಲ್ಲವೇ ! ಏಕೆ?

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

1. $n(A), n(B), n(A \cup B)$ ಮತ್ತು $n(A \cap B)$ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?
2. ಗಣಗಳು A ಮತ್ತು B ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳಾದರೆ $n(A \cup B)$ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು?

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

**ಗಣಗಳ ಭಾವನೆ-ಗಣಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು-ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳು.**

★ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಇಷ್ಟವಾದ ಆಟಗಳು/ಸಮಾಚಾರ ಪತ್ರಿಕೆಗಳು/ಟಿ.ವಿ. ಚಾನಲಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸರ್ವೆ ಮಾಡಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂದಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿ. ಗಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (i) 1ನೇಯದು ಆಟ/(i) ಟಿ.ವಿ. ಚಾನಲ್‌ಗಳು ಇಷ್ಟಪಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (ii) 2ವ ಆಟ/2ನ ಟಿ.ವಿ. ಚಾನಲ್ ಇಷ್ಟಪಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (iii) 1ನೇ ಆಟ ಮತ್ತು 1ನೇ ಟಿ.ವಿ.ಚಾನಲ್‌ನ್ನು ಇಷ್ಟಪಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (iv) ಯಾವುದನ್ನು ಇಷ್ಟಪಡದೇ ಇರುವವರ ಸಂಖ್ಯಾಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ :** ಮೇಲಿನ ಪ್ರೊಜೆಕ್ಟನ್ ಮೂರು ಅಂಶಗಳ ಮೇಲು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

1. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ ವಸ್ತುಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಗಣ ಎನ್ನುವರು. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ ಅಂದರೆ,
   (i) ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಹೋಲಿಕೆ ಅಥವಾ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು
   (ii) ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.
2. ಗಣದಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಗಣಾಂಶಗಳೆಂದು ಕರೆಯುವರು. 'ಈ ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆ ' ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ '$\in$' ಎನ್ನುವ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.
3. ಗಣಗಳನ್ನು ರೋಸ್ಟರ್ ಪದ್ದತಿ ಅಥವಾ ಪಟ್ಟಿಕ್ರಮ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಬರೆದು ಕಾಮಾ (,) ಗಳಿಂದ ಬೇರೆ ಮಾಡಿ { } ಪುಷ್ಪಾವರಣದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.
4. ಗಣಗಳನ್ನು ನಿಯಮ ಪದ್ದತಿ ಅಥವಾ ಸೆಟ್ ಬಿಲ್ಡರ್ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.
5. ಯಾವುದೇ ಗಣದಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆ ಗಣವನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಗಣ ಎನ್ನುವರು.
6. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಎನ್ನುವರು.
7. ಒಂದು ಗಣವು ಎಣಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
8. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆ ಗಣದ 'ಮೂಲಾಂಕ ' ಎನ್ನುವರು.
9. ವಿಶ್ವಗಣ '$\mu$' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.
10. ಗಣ A , B ಗಣಕ್ಕೆ ಉಪಗಣ ಯಾವಾಗ ಆಗುವುದೆಂದರೆ 'a' ಗಣಾಂಶ ಗಣ A ನಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶ ಆಗಿದ್ದು, ಗಣ B ನಲ್ಲಿ ಸಹ ಗಣಾಂಶವಾದರೆ ಗಣ A, B ಗಣಕ್ಕೆ ಉಪಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $a \in A \Rightarrow a \in B$ ಆದರೆ $A \subset B$ ( A,B ಗಳು ಎರಡು ಗಣಗಳು )
11. ಎರಡು ಗಣಗಳು A ಮತ್ತು B ಸಮಾನ ಆಗಬೇಕಾದರೆ Aನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ B ನಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶ A ನಲ್ಲಿರಬೇಕು.
12. A,B ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು $A \cup B$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $A \cup B = \{x : x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B\}$.
13. A, B ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು $A \cap B$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $A \cap B = \{x : x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$
14. A, B ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು $A - B$ ಅಥವಾ $B - A$ ಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.
15. ಗಣಗಳ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ
3
# ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು
## (Polynomials)

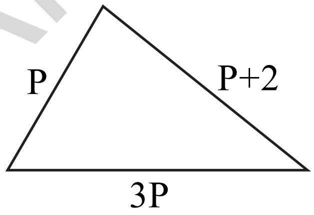
### 3.1 ಪರಿಚಯ :

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

1. ಒಂದು ಹೂವಿನ ತೋಟ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು, ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿಗೆ **3** ರಷ್ಟು, ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು ಮಧ್ಯಬಾಹುವಿಗಿಂತ 2 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ **P** ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಆದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ **P** ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು **?**

2. ಪ್ರತಿ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತರಾಶಿ ಇದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ = ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತ




ಸುತ್ತಳತೆ $= \mathrm{P} + 3\mathrm{P} + \mathrm{P} + 2$
$= \mathrm{P} + 2$

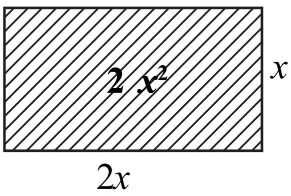
3. ಒಂದು ಭೋಜನಾಶಾಲೆಯ ಉದ್ದ ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದು. ಆ ಕೋಣೆಯ ಅಗಲ $x$ ಯುನಿಟ್‌ಗಳಾದರೆ, ಅದರ ನೆಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $x$ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ?

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡನೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಅಗಲಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಗಲ $= x$, ಆದರೆ ಉದ್ದ $= 2x$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= lb$

$= (2x)\ (x)$
$= 2\,x^2$




ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ $5\mathrm{P} + 2$ ಮತ್ತು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $2x^2$ ಎನ್ನುವವು ವಿಭಿನ್ನ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠಘಾತಗಳಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

### 3.2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೆಂದರೇನು ? (What are Polynomials?)

a ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು n ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿ $ax^n$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಪರಿಮಿತಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಬೀಜಿಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುವರು.

| ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿ | ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲದ್ದು |
|---|---|
| $2x$ | $4x^{1/2}$ |
| $1/3\ x-4$ | $3x^2 + 4x^{-1} + 5$ |
| $x^2 - 2x - 1$ | $4 + 1/x$ |

1/y-1 ಎಂಬುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಏಕೆ ಅಲ್ಲವೋ, ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯರೊಂದಿಗೆ ಶಿಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ? ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $4z^2 + \frac{1}{7}$ (iv) $m^2 - \sqrt{2}\,m + 2$ (v) $P^{-2} + 1$

### 3.2.1 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಟಘಾತ (Degree of a Polynomial)

$x$ ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ p($x$)ನಲ್ಲಿ $x$ನ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಾಂಕ p($x$) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಠಘಾತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನೆನಪಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಿ .ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x$ ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x + 5$ ಇದರ ಪರಿಮಾಣ 1. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $5x$, $\sqrt{2}y+5$ , $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ ಮುಂತಾದವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು. ಎರಡನೇ ಗರಿಷ್ಠಘಾತವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುವರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x^2 + 5x + 4$ ಎನ್ನುವ ಪದೋಕ್ತಿ $x$ ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $p^2 - 1$, $3 - z - z^2$, $y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ ಇವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು.

$5x^3 - 4x^2 + x - 1$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು $x$ ಚರಾಕ್ಷರ ಹೊಂದಿದ ಮೂರನೇ ಗರಿಷ್ಠಘಾತವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $2 - x^3$, $p^3$, $\ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ ಇವು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು. 6 ನ್ನು $6.x^0$ ಬರೆಯಬಹುದು ಇಲ್ಲಿ $x$ನ ಘಾತ 0 ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಮಾಣ 0 ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಪ್ರಯತಿಸಿರಿ :**

ಯಾವುದಾದರೂ ಘನಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಪದಗಳಿಂದ ಬರೆಯಿರಿ.

ನಾವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಾದರೂ ಬರೆಯಬಹುದು. $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$ ಎನ್ನುವುದು 6ನೇ ಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 - 1$ ಎನ್ನುವುದು 10 ಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ.·n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, $x$ ಚರಾಕ್ಷರದಿಂದ ಕೂಡಿದ n ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದಿದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

***ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು***

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ ಎನ್ನುವುದು n ನೇ ಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ ಇವು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ವಾಸ್ತವ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು $a_0 \neq 0$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ ಹೊಂದಿದ ಪ್ರಥಮ ಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax+b$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a$ ಮತ್ತು $b$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. $x$ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ, ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಆದರ್ಶ ರೂಪಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. n ಪರಿಮಾಣ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $q(z)$ ನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರ ಸಹಗುಣಕಗಳಾಗಿ $b_0 \ldots b_n$. ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಯಾವ ನಿಬಂಧನೆಗಳು ವರ್ತಿಸುತ್ತವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ ?

## 3.2.2 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆ (Value of a Polynomial)

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = 1$ ಆದಾಗ ಇದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $x = 1$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. ಇದು $p(x)$ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದದಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರ $x$ ಗೆ ಬದಲಾಗಿ 1 ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ $x = 1$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $x^2 - 2x - 3$ ಬೆಲೆ $-4$ ಆಗಿದೆ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ, $x = 0$ ಬೆಲೆಯ ಹತ್ತಿರ $p(x)$ ಬೆಲೆ $p(0) = -3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಚರಾಕ್ಷರ '$x$' ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $k$ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಬೆಲೆ $p(k)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $k$ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

(i) $p(x) = x^2 - 5x - 6$, ಆದಾಗ $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $p(m) = m^2 - 3m + 1$ ಆದಾಗ $p(1)$ ಮತ್ತು $p(-1)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

## 3.2.3 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು (Zeroes of a Polynomial)

$x = 3, -1$ ಮತ್ತು 2 ಹತ್ತಿರ $p(x) = x^2 - 2x - 3$ ಬೆಲೆಗಳೆಷ್ಟು?

$$p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನಮಗೆ $$p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

ಮತ್ತು $$p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

ನಮಗೆ $p(3) = 0$ ಮತ್ತು $p(-1) = 0$ ಆಗಿವೆ. ಅಂದರೆ $x = 3$ ಮತ್ತು $x = -1$, ಎನ್ನುವವು $p(x) = x^2 - 2x - 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

$p(2) \neq 0$, ಆದ್ದರಿಂದ 2 ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ ನ **'ಶೂನ್ಯತೆ'** ಆಗಲಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $k$ ಎನ್ನುವುದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ $p(k) = 0$ ಆಗಬೇಕು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ ಆದರೆ $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು $p(x)$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಯಾವುವೋ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $x^2 - 9$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ -3 ಮತ್ತು 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗುತ್ತವೋ ? ಇಲ್ಲವೋ ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 3.1

1. (a) $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x^5$ ನ ಸಹಗುಣಕ (ii) $p(x)$ ನ ಪರಿಮಾಣ (iii) ಸ್ಥಿರಪದ.

   (b) ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಂತೆ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸತ್ಯ ? ಯಾವುವು ಅಸತ್ಯ ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

   (i) $\sqrt{2}\,x^2 - 3x + 1$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ $\sqrt{2}$.

   (ii) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $x^2$ ನ ಗುಣಕ 2.

   (iii) ಸ್ಥಿರಾಂಕದ ಪರಿಮಾಣ ಸೊನ್ನೆ.

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

   (v) ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು.

3. $p(t) = t^3 - 1$ ಆದರೆ $p(1)$, $p(-1)$, $p(0)$, $p(2)$ ಮತ್ತು $p(-2)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $-2$ ಮತ್ತು 2, $x^4 - 16$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗುತ್ತವೋ ? ಇಲ್ಲವೋ ? ಸರಿನೋಡಿರಿ.

5. $p(x) = x^2 - x - 6$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ 3 ಮತ್ತು $-2$ ಎನ್ನುವವು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಆಗುವವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

## 3.3 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (WORKING WITH POLYNOMIALS)

ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ 'ಶೂನ್ಯತೆಗಳು' ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ಹೀಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = 2x + 5$ಕ್ಕೆ $k$ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದರೆ

$p(k) = 0$ ಆಗ $2k + 5 = 0$ ಆಗ $k = \dfrac{-5}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $p(x) = ax+b$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $k$ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯಾದರೆ $a \neq 0$.

$p(k) = ak + b = 0$

ಆಗ $k = \dfrac{-b}{a}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ $ax + b$ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯತೆ $\dfrac{-b}{a}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಎನ್ನುವುದು ಅದರ ಚರಾಕ್ಷರ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ, ಸ್ಥಿರಪದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

## 3.4 ಬಹುಪದಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಜಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥಗಳು (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

$p(x)$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ, $k$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $p(k) = 0$ ಆದರೆ $k$ ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯವಹಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ, ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

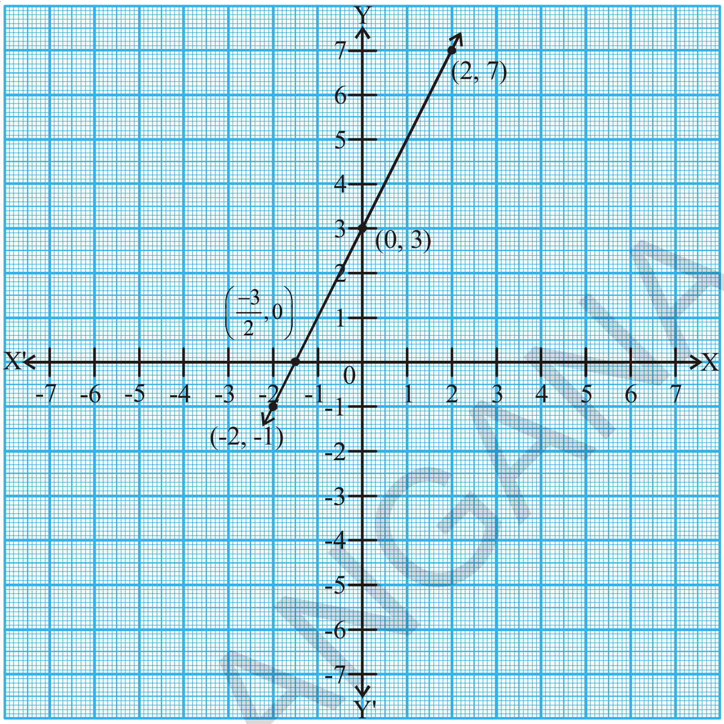
### 3.4.1. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರೇಖಾಚಿತ್ರ (GRAPHICAL REPRESENTATION OF A LINEAR POLYNOMIAL)

$ax + b, a \neq 0$ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. $y = ax + b$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ನೀವು 9 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $y = 2x + 3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಇದು $y$-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, 3)$ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸುತ್ತಾ $(-2, -1)$ ಮತ್ತು $(2, 7)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತಿದೆ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 3.1**

| $x$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $y = 2x + 3$ | $-1$ | $3$ | $7$ |
| $(x, y)$ | $(-2, -1)$ | $(0, 3)$ | $(2, 7)$ |

ಈ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿದರೆ $y = 2x+3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರೇಖೆ $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು $x = -1$ ಮತ್ತು $x = -2$, ಗಳ ನಡುವೆಯಿಂದ ಭೇದಿಸುತ್ತಾ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತಿದೆ.




$x = \frac{-3}{2}$ ಎನ್ನುವುದು $2x + 3$ ಎನ್ನುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ನೀವು ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $2x + 3$ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಇದರ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಇವುಗಳ x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳೇ ?

ನಾವು $ax + b$, $a \neq 0$, ಎನ್ನುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $y = ax + b$ ಎನ್ನುವ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಒಂದೇ ಬಿಂದು, $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ ಹತ್ತಿರ ಭೇದಿಸುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

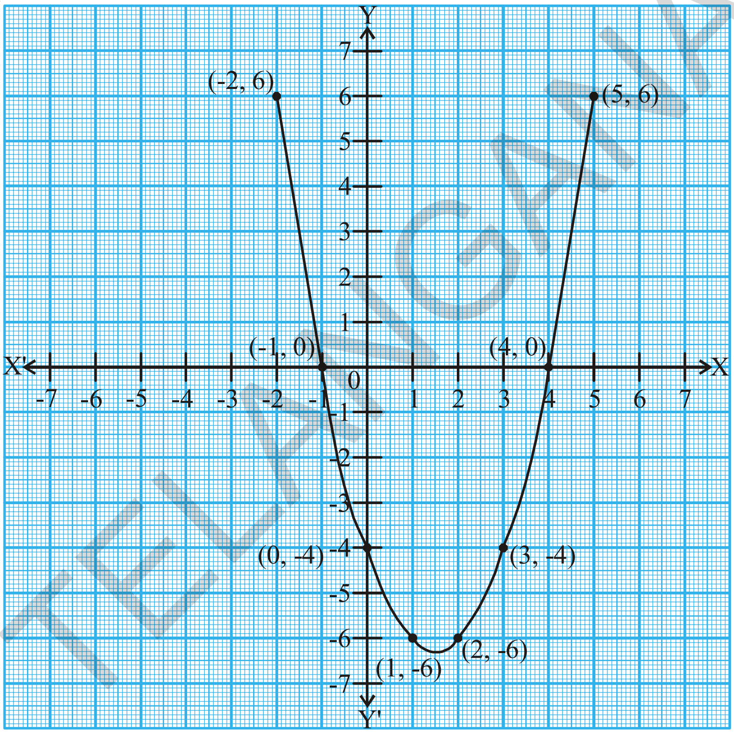
ಆದ್ದರಿಂದ $ax + b$, $a \neq 0$, ಎನ್ನುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ , ಅಂದರೆ ಅದರ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $y = ax + b$ $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು $x = \frac{-b}{a}$

## 3.4.2. ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರೇಖಾಚಿತ್ರ
## (Graphical Representation of a Quadratic Polynomial )

ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗೆ ಸೂಕ್ತ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $x^2 - 3x - 4$ ಎನ್ನುವ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರ ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಹೇಗಿರುತ್ತದೋ ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ $y = x^2 - 3x - 4$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $x$ ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ಕೋಷ್ಟಕ 3.2ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 3.2**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2 - 3x - 4$ | 6 | 0 | $-4$ | $-6$ | $-6$ | $-4$ | 0 | 6 |
| $(x, y)$ | $(-2, 6)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 4)$ | $(1, -6)$ | $(2, -6)$ | $(3, -4)$ | $(4, 0)$ | $(5, 6)$ |




ಗ್ರಾಫ್ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ, ಒಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಈ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆಯಾ? ಇದು $\cup$ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ವಕ್ರವಾಗಿ ಬಂದಿದೆ. ಇದು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿದೆ.

ಆದರೆ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಈ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣ ರೂಪ $y = ax^2 + bx + c$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $\cup$ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕಾದರೂ ಅಥವಾ $\cap$ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕಾದರೂ ಬರುವ ವಕ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಆಕಾರ $a > 0$ ಅಥವಾ $a < 0$ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. (ಈ ವಕ್ರಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಾವಲಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ)

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು -1 ಮತ್ತು 4 ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ವಕ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು -1 ಮತ್ತು 4 ಯಾಗಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ $x^2 - 3x - 4$ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು, ಈ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $P(x)=y=x^2-3x-4$ ನಲ್ಲಿ $P(-1)=0$ ಇದರ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$ ಅಕ್ಷೆಯನ್ನು $(-1,0)$ ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $P(4)=0$ $x$ ಅಕ್ಷೆಯನ್ನು $(4,0)$ ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ $P(x)$ ನಲ್ಲಿ $P(a)=0$ ಆದರೆ $P(x)$ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$ ಅಕ್ಷೆಯನ್ನು $(a,0)$ ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

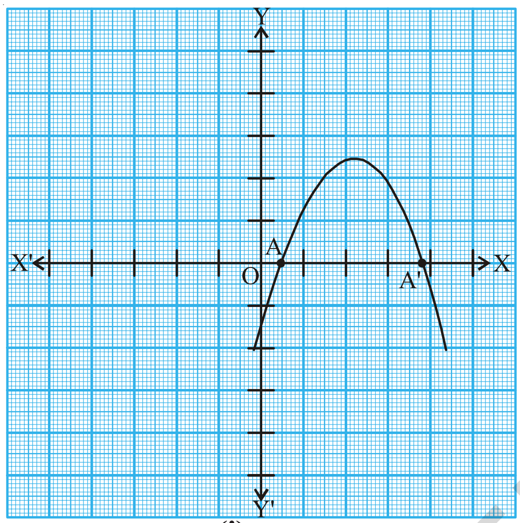
ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಎನ್ನುವ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಈ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣ $y = ax^2 + bx + c$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

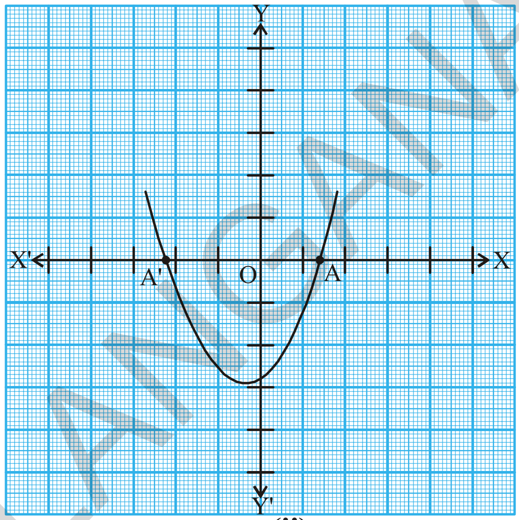
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ ಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?

ನಾವು ಮೊದಲು ನಡೆಸಿದ ಪರಿಶೀಲನೆಯ ಆಧಾರವಾಗಿ $y = ax^2 + bx + c$ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಈ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಬಹುದು.

**ಸಂದರ್ಭ (i) :** ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಕ್ರರೇಖೆ $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಮತ್ತು $A^1$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು $A^1$ ಬಿಂದುಗಳು $x$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2+bx+c$ಗೆ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ಪರಾವಲಯವು ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕಾದರೂ, ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕಾದರೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಬಹುದು.

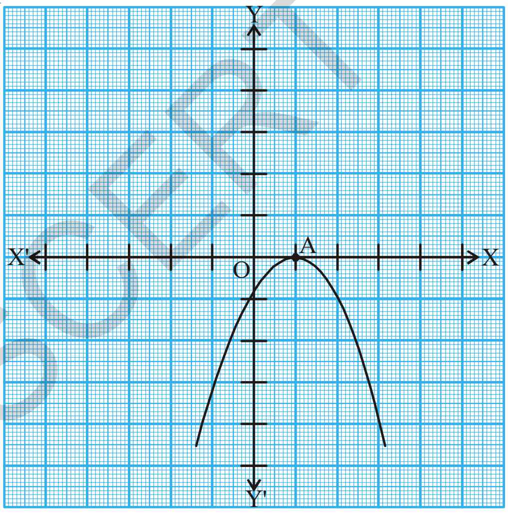


(i)

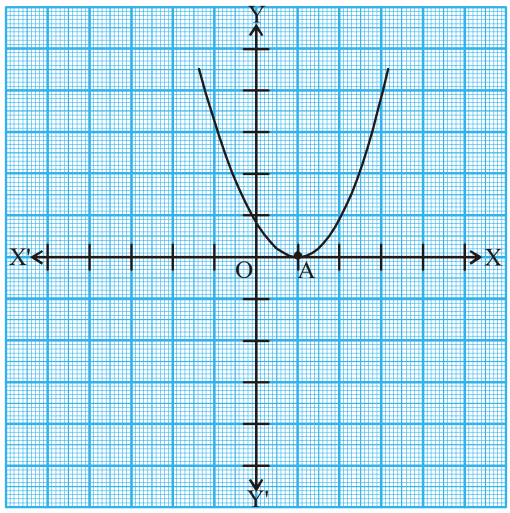


(ii)

**ಸಂದರ್ಭ (ii) :** ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಹತ್ತಿರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕೀಭವಿಸುತ್ತಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಸಂದರ್ಭ (i)ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ A ಮತ್ತು $A^1$ ಬಿಂದುಗಳು ಎರಡೂ ಏಕೀಭವಿಸಿ ಒಂದೇ ಬಿಂದು A ಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ.



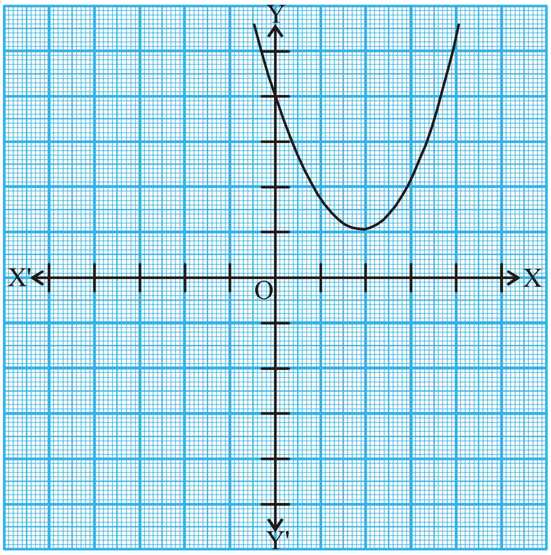
(i)



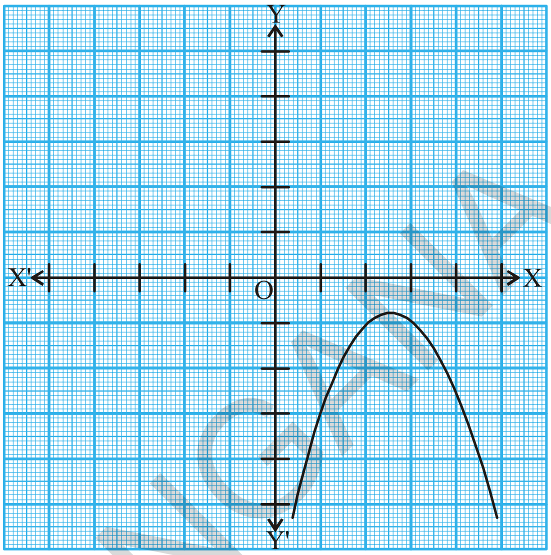
(ii)

ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು Aನ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಸಂದರ್ಭ (iii) :** ಇಲ್ಲಿ, ರೇಖಾಚಿತ್ರವು $x$- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಪೂರ್ತಿ ಮೇಲೆಯಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಕೆಳಗಾಗಲಿ ಇದ್ದು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದು ಹತ್ತಿರವೂ ಛೇದಿಸಿಲ್ಲ.




(i)




(ii)

ಹಾಗಾಗಿ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ಗೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 'ಶೂನ್ಯತೆ' ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

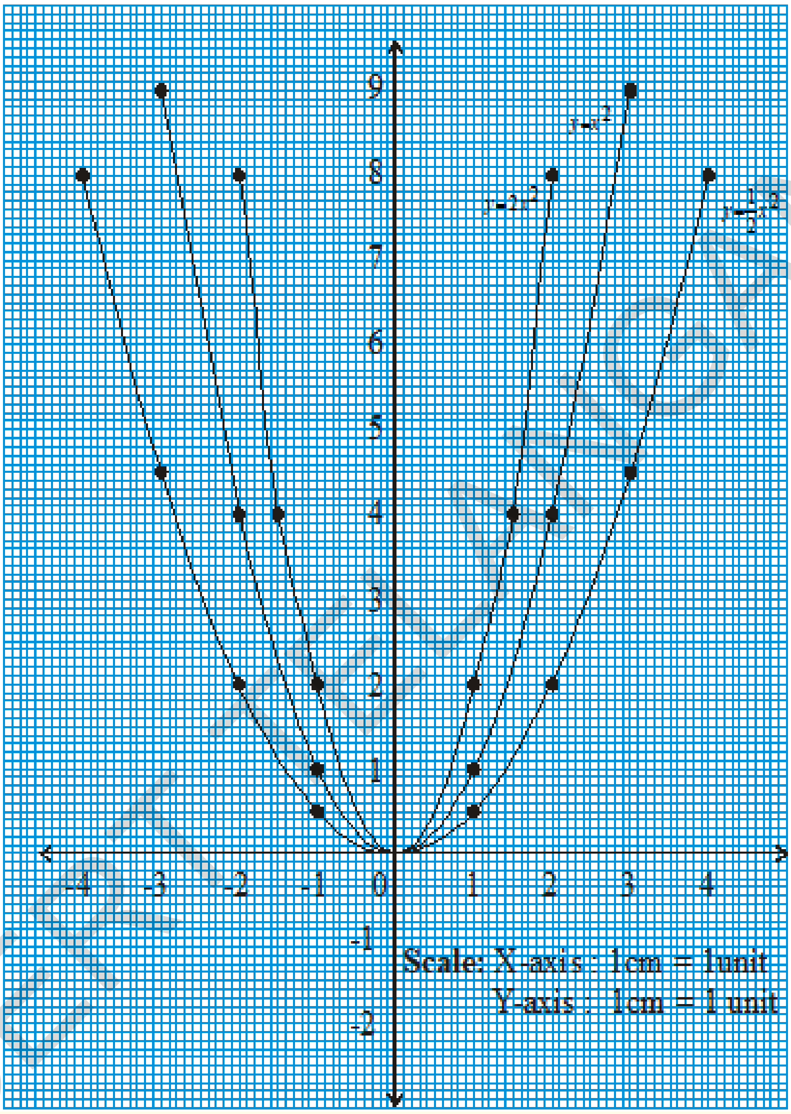
ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಲಿ, (ಎಂದರೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ) ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಇರದೆ ಹೋಗಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಎರಡನೇ ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಅತ್ಯಧಿಕವಾಗಿ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಇರುತ್ತವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

1. ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಇದ್ದರೆ ಇದನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವೆ ?
4. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $x$ ಹೊಂದಿದ್ದು ಶೂನ್ಯತೆ ಇಲ್ಲದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ :**

$y = \frac{1}{2}x^2$ , $y = x^2$ $y = 2x^2$ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ನೀವು $y = x^2+1$ , $y = 2x^2+1$ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

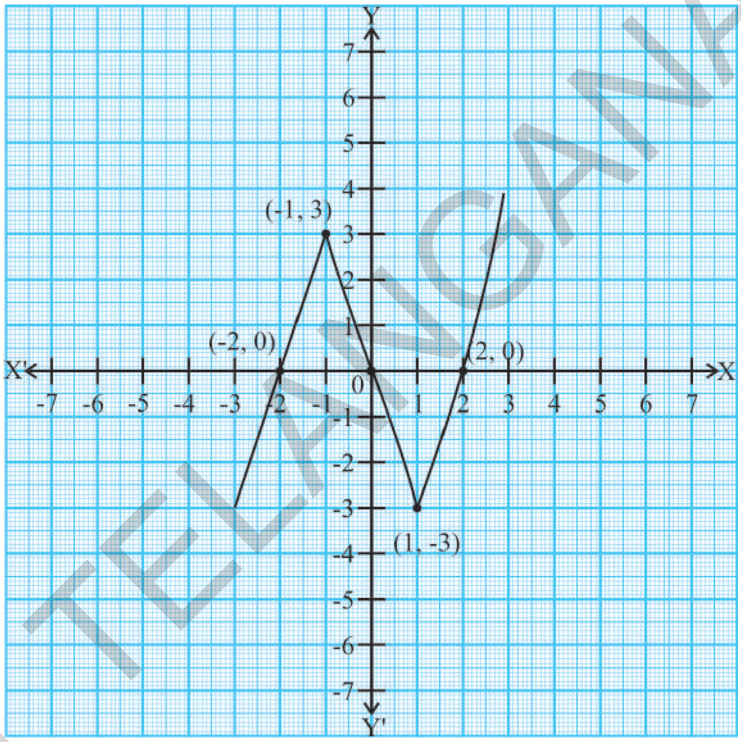



## 3.4.3 ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಭಾವನೆ (Geometrical Meaning of Zeroes of a Cubic Polynomial)

ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯವಾಗಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ನೀವು ಏನನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವೆ ? ಇದು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯವೋ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡೋಣ. ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 - 4x$ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $y = x^3 - 4x$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿ ಅದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 3.3ನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವಿಧವಾಗಿ ಚರಾಕ್ಷರ $x$ ಗೆ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ತಕ್ಕ $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 3.3**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^3 - 4x$ | $0$ | $3$ | $0$ | $-3$ | $0$ |
| $(x, y)$ | $(-2, 0)$ | $(-1, 3)$ | $(0, 0)$ | $(1, -3)$ | $(2, 0)$ |




ನಾವು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 - 4x$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $-2$, $0$ ಮತ್ತು $2$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದರ ರೇಖಾಚಿತ್ರ $y = x^3 - 4x$ನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ರೇಖಾ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ವಕ್ರವು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು, $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಗಳು $-2$, $0$ ಮತ್ತು $2$ ಯಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

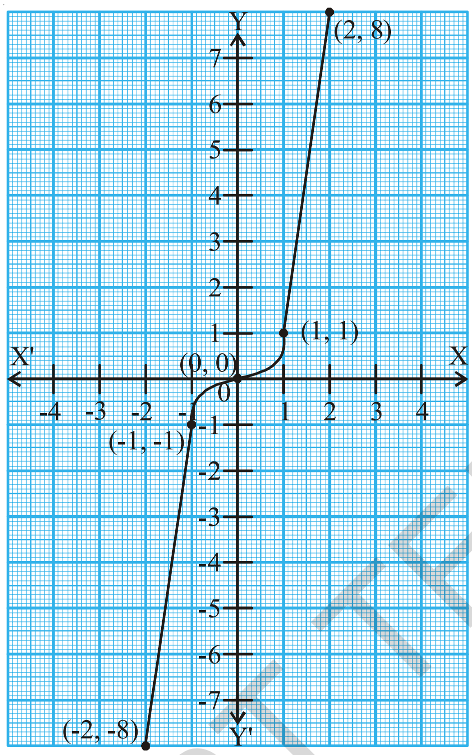
ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡೋಣ. $x^3$ ಮತ್ತು $x^3 - x^2$ ಎನ್ನುವ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಕೋಷ್ಟಕ 3.4 ಮತ್ತು 3.5 ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 3.4**

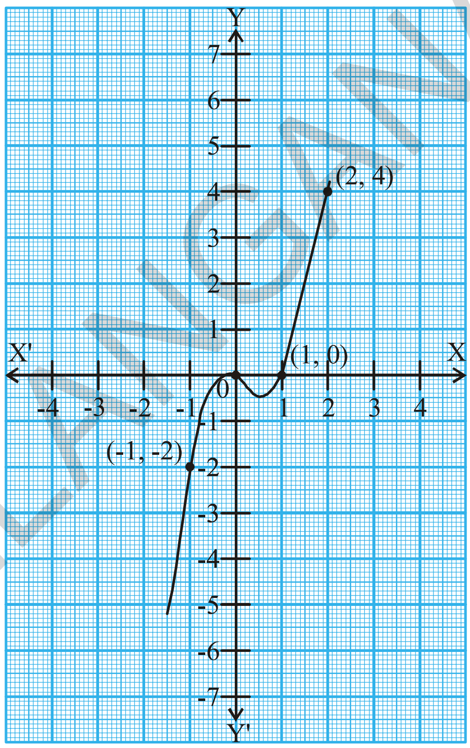
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^3$ | $-8$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $8$ |
| $(x, y)$ | $(-2, -8)$ | $(-1, -1)$ | $(0, 0)$ | $(1, 1)$ | $(2, 8)$ |

**ಕೋಷ್ಟಕ 3.5**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = x^3 - x^2$ | –12 | –2 | 0 | 0 | 4 |
| $(x, y)$ | (–2, –12) | (–1, –2) | (0, 0) | (1, 0) | (2, 4) |




$y = x^3$




$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ಮಾಡಿದರೆ, $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿದೆ. ಮತ್ತು ಇದರ $x$- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ 'ಸೊನ್ನೆ' ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಬಂದಿದೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $y = x^3 - x^2$ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಈ ವಕ್ರ $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು 0 ಮತ್ತು 1 ಆಗಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಬಂದಿರುವುದು ನಡೆದಿದೆ.

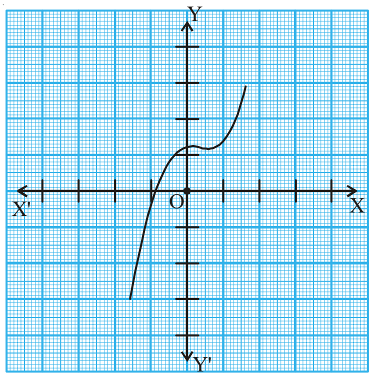
ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ 3 ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಬಂದಿವೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ಯಾವುದಾದರೂ 3 ನೇ ಪರಿಮಾಣ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ ಮೂರು ಶುನ್ಯತೆಗಳು ಇರಬಹುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

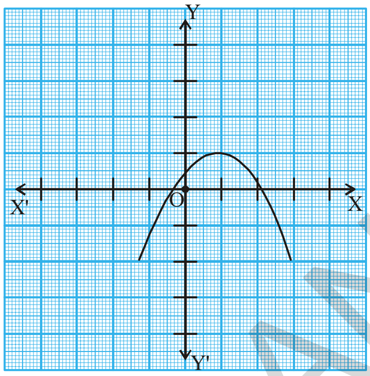
ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯದೇ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$

**ಗಮನಿಸಿರಿ :** nನೇ ಪರಿಮಾಣ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಎಂದರೆ $y = p(x)$ ಎನ್ನುವುದು $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ $n$ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಹಾಗಾಗಿ $n$ನೇ ಪರಿಮಾಣದ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ಗೆ ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ $n$ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

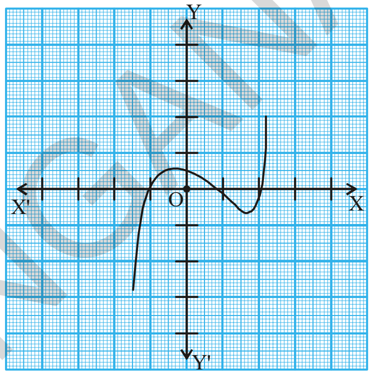
**ಉದಾಹರಣೆ-1.** ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ರೇಖಾಚಿತ್ರ $y = p(x)$ ಇಲ್ಲಿ $p(x)$ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $x$ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



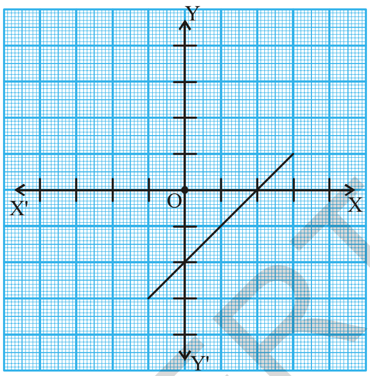
(i)



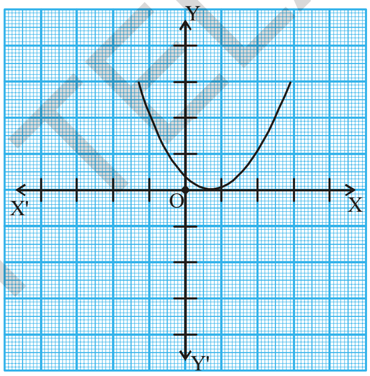
(ii)



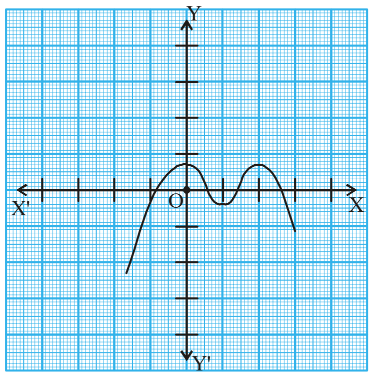
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $x$ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳು :

(i) ರೇಖಾಚಿತ್ರ $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1.

(ii) ರೇಖಾಚಿತ್ರ $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2.

(iii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3. (ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ?)

(iv) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1. (ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ?)

(v) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1. (ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ?)

(vi) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4. (ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ?)

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

**ಪರಿಹಾರ :** ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯದೇ ನಾವು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $p(x) = 2x + 1$ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

$p(x) = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂದರೆ, $2x+1=0$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{-1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ $\frac{-1}{2}$.

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

$q(y) = 0$ ಇರಲಿ.

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ ಅಥವಾ $y = 1$

ಹಾಗಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು -1 ಮತ್ತು 1 ಆಗಿವೆ.

(iii) $r(z) = z^3$ ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

$r(z) = 0$ ಇರಲಿ

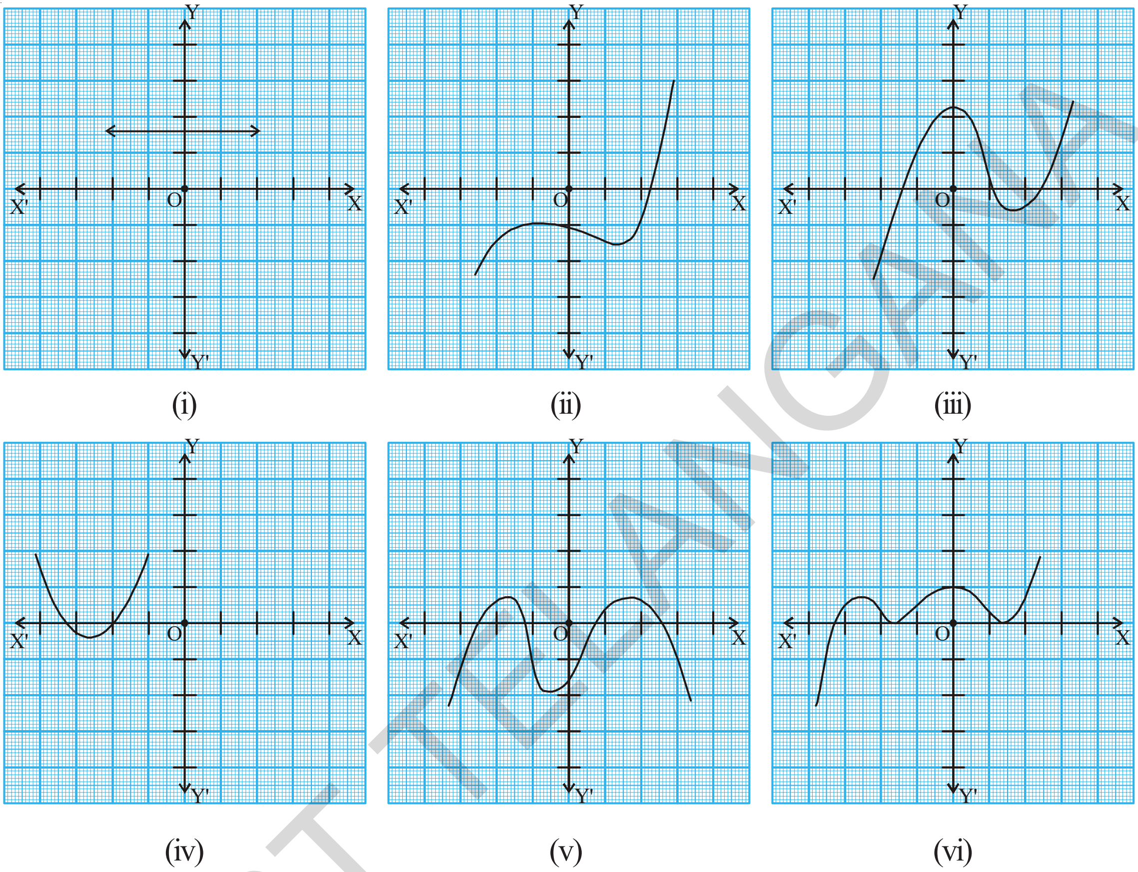
$\Rightarrow z^3 = 0$

$\Rightarrow z = 0$

ಹಾಗಾಗಿ, ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 'ಸೊನ್ನೆ'ಯಾಗಿದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ – 3.2

1. ಕೆಲವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು $p(x)$ ನ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳು $y = p(x)$ ನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $p(x)$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.



2. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $p(x) = 3x$  (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

   (iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$  (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

   (i) $p(x) = x^2 - x - 12$  (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

   (iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$  (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

   (v) $p(x) = x^2 - 1$

4. $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೊಕ್ತಿಗೆ $1, -1$ ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಎಂಬುವವು ಹೇಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗುವವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

## 3.5 ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೂ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೂ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ (RELATIONSHIP BETWEEN ZEROES AND COEFFICIENTS OF A POLYNOMIAL)

$ax + b$ ಎನ್ನುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ $-\frac{b}{a}$ ಎಂದು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ನಾವು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಹ ಗುಣಕಗಳಿಗೆ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಅಪವರ್ತನ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವುದು ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದವು '$-8x$' ನ್ನು ಎರಡು ಪದಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸೋಣ. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $6 \times 2x^2 = 12\, x^2$ ಆಗಬೇಕು.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6 \\ &= 2x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (2x - 2)\,(x - 3) = 2(x - 1)\,(x - 3) \end{aligned}$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ $x - 1 = 0$ ಅಥವಾ $x - 3 = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ $x = 1$ ಅಥವಾ $x = 3$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ $2x^2 - 8x + 6$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 1 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ. ಈಗ ನಾವು ಈ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ, ವರ್ಗಾತ್ಮ ಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಎಂತಹ ಸಂಬಂಧ ಇದೆಯೇ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $x^2$ನ ಸಹಗುಣಕ 2; $x$ನ ಸಹಗುಣಕ $-8$ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ 6 ಎಂದರೆ $x^0$ ನ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿದೆಂದರ್ಥ. (ಎಂದರೆ $6x^0 = 6$)

ಇಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= 1 + 3 = 4 = \dfrac{-(-8)}{2} = \dfrac{-(x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 1 \times 3 = 3 \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಪದ}}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$$p(x) = 3x^2 + 5x - 2.$$

ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆದಾಗ, ನಮಗೆ

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (3x - 1)\,(x + 2) \end{aligned}$$

$3x^2 + 5x - 2$ ಶ್ಯೂನವಾಗಬೇಕಾದರೆ $3x - 1 = 0$ ಅಥವಾ $x + 2 = 0$ ಆಗಬೇಕು.

ಎಂದರೆ $x = \dfrac{1}{3}$ ಅಥವಾ $x = -2$.

ಹಾಗಾಗಿ $3x^2 + 5x - 2$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\dfrac{1}{3}$ ಮತ್ತು $-2$

ಇವುಗಳಿಂದ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು.

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \dfrac{1}{3} + (-2) = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{-(x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \dfrac{1}{3} \times (-2) = \dfrac{-2}{3} \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಪದ}}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ.

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\alpha$ ಮತ್ತು $\beta$ ಗಳಾದರೆ $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಗಳನ್ನು $p(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$, $k$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ

$$= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta$$

ಇದನ್ನು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿನ $x^2$, $x$ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ

$a = k$, $b = -k(\alpha+\beta)$ ಮತ್ತು $c = k\alpha\beta$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$,

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ಆಗಿವೆ.

**ಗಮನಿಸು :** $\alpha$ ಮತ್ತು $\beta$ ಇವು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರಗಳು. ಇವನ್ನು 'ಆಲ್ಫಾ' ಮತ್ತು 'ಬೀಟಾ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಅಕ್ಷರ '$\gamma$'ನ್ನು ಕೂಡ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು 'ಗಾಮಾ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಪದ}}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-3.** $x^2 + 7x + 10$ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ನಮಗೆ $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 + 7x + 10$ ನ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ

$x + 2 = 0$ ಅಥವಾ $x + 5 = 0$ ಆಗಬೇಕು.

ಎಂದರೆ $x = -2$ ಅಥವಾ $x = -5$ ಆಗಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 + 7x + 10$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $-2$ ಮತ್ತು $-5$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -2 + (-5) = -(7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -2 \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಪದ}}{x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

**ಉದಾಹರಣೆ-4.** $x^2 - 3$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ,

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 - 3$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $x = \sqrt{3}$ ಅಥವಾ $x = -\sqrt{3}$.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ $x^2 - 3$ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\sqrt{3}$ ಆಗುತ್ತದೆ. $-\sqrt{3}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 = \dfrac{-(x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ})}{x^2\text{ನ ಗುಣಕ}}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಪದ}}{x^2\text{ನ ಗುಣಕ}}$

**ಉದಾಹರಣೆ-5.** ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $-3$ ಮತ್ತು 2, ಆದರೆ ಆ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\alpha$ ಮತ್ತು $\beta$ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ಆಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = -3 = \dfrac{-b}{a}$ ಮತ್ತು

$\alpha\beta = 2 = \dfrac{c}{a}$.

ನಾವು $a = 1$, ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $b = 3$ ಮತ್ತು $c = 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಗಳಿಗೊಳಗೊಂಡ ಏರ್ಪಡುವ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 + 3x + 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ '$a$' ನ್ನು ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಾದರೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು $k$ ಎನ್ನುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\frac{-b}{k} = -3$ ಅಥವಾ $b = 3k$ ಮತ್ತು $\frac{c}{k} = 2$ ಅಥವಾ $c = 2k$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾದ ನಮಗೆ $kx^2 + 3kx + 2k$ ಎನ್ನುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಬರುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-6.** ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು $\frac{-1}{3}$ ಆದರೆ ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\alpha$ , $\beta$ ಗಳು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಇಲ್ಲಿ $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$ ನ್ನು

$k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\,\beta]$, $k$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪದವಾಗಿ ಬರೆದರೆ,

$= k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ $k$ ಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು.

$k = 3$, ಆದರೆ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^2 - 5x - 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತು $k = 6$ ಆದರೆ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $6x^2 - 10x - 4$ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

(i) $-2$ ಮತ್ತು $\frac{1}{3}$ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{-3}{2}$ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ $-1$ ಹೊಂದಿದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಯಾವುದು ?

## 3.6 ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ (Cubic Polynomials)

ನಾವು ಈಗ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ, ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಾದರೂ ಇರಬಹುದೇ, ನೋಡೋಣ.

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$ ,ಬೆಲೆಗಳ ಹತ್ತಿರ $p(x) = 0$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಬಹುದು.

$p(x)$ ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮೂರು ಇರುವವೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಹಾಗಾಗಿ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ನ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು 4, –2 ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

$$\text{ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2\text{ನ ಸಹಗುಣಕ})}{x^3\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$$

$$\text{ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{(\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ})}{x^3\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$$

ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ, ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿದೆ. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಎರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಈ ಸಂಬಂಧವು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$\text{ಅಂದರೆ} = \{4\times(-2)\} + \left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} \quad \frac{x\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^3\text{ನ ಸಹಗುಣಕ}}$$

ಇದರಿಂದಾಗಿ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\alpha, \beta, \gamma$ ಆಗಿದ್ದಾಗ

$\alpha, \beta, \gamma$ ಗಳು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ $ax^3+bx^2+cx+d$ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು. ಇವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಾದ a, b, c, ಗಳೊಂದಿಗೆ ಎಂತಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $\alpha, \beta, \gamma$ ಗಳು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$$= x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$

ಇದನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಇದನ್ನು '$a$' ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಆಗ

$ax^3 - x^2a(\alpha+\beta+\gamma) + xa(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma$ ಅಥವಾ

$$\therefore \quad b = -a(\alpha+\beta+\gamma), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$, ಮತ್ತು $\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}$.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

$\alpha, \beta$ ಮತ್ತು $\gamma$ ಗಳು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ ಸೂಕ್ತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ

| ಕ್ರ.ಸಂ. | ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ | $\alpha + \beta + \gamma$ | $\alpha\beta + \beta\alpha + \gamma\alpha$ | $\alpha\beta\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x^3 + 3x^2 - x - 2$ | | | |
| 2 | $4x^3 + 8x^2 - 6x - 2$ | | | |
| 3 | $x^3 + 4x^2 - 5x - 2$ | | | |
| 4 | $x^3 + 5x^2 + 4$ | | | |

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-7.** ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 3, $-1$ಮತ್ತು $-\frac{1}{3}$ ಆಗುವವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ನ್ನು $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ $a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು 3, $-1$ ಮತ್ತು $-\frac{1}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ $\alpha = 3, \beta = -1$ ಮತ್ತು $\gamma = -\frac{1}{3}$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

## ಅಭ್ಯಾಸ – 3.3

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಸಹ ಗುಣಕಗಳಿಗೆ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

3. ಒಂದು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\alpha$, $\beta$ ಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 + 3x^2 - x + 3$ಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $1, -1$ ಮತ್ತು $-3$ ಆಗುತ್ತವೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

## 3.7 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ (DIVISION ALGORITHM FOR POLYNOMIALS)

ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ ಮತ್ತು ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಉಳಿದ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ ? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^3 + 3x^2 - x - 3$ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ 1 ಆದರೆ, ಅದನ್ನು $(x-1)$ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $(x-1)$ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^2 - 2x - 3$. ಇದರ ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆ ನಂತರ $(x + 1)$ ಮತ್ತು $(x - 3)$ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $1, -1$ ಮತ್ತು 3 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-8.** $2x^2 + 3x + 1$ ನ್ನು $x + 2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\begin{array}{r l}
 & 2x-1 \\
x+2 \big) & \overline{2x^2+3x+1} \\
 & 2x^2+4x \\
 & -\quad - \\
\hline
 & -x+1 \\
 & -x-2 \\
 & +\quad + \\
\hline
 & 3
\end{array}$$

**ಪರಿಹಾರ :** ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಬಂದರೂ ಅಥವಾ ಶೇಷದ ಪರಿಮಾಣ, ಭಾಜಕದ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಾಗ ಭಾಗಾಕಾರ ಪೂರ್ಣಗೊಂಡಂತೆ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ, ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ $2x–1$ ಮತ್ತು ಶೇಷ 3 ಆಗಿದೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿದರೆ

$$(2x – 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x – 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

ಎಂದರೆ, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x – 1) + 3$

ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಮುಂದುವರೆಸಿ ಒಂದು ಬಹುದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-9.** $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ನ್ನು $1 + 2x + x^2$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

$$\begin{array}{r l}
 & 3x-5 \\
x^2+2x+1 \big) & \overline{3x^3+x^2+2x+5} \\
 & 3x^3+6x^2+3x \\
 & -\quad -\quad - \\
\hline
 & -5x^2-x+5 \\
 & -5x^2-10x-5 \\
 & +\quad +\quad + \\
\hline
 & 9x+10
\end{array}$$

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೊದಲು ನಾವು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಪದಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಕೆಲವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯವು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಭಾಜಕವನ್ನು ಕೂಡ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ $x^2 + 2x + 1$ ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

**ಹಂತ 1 :** ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟಪರಿಮಾಣ ಪದವನ್ನು (ಅಂದರೆ $3x^3$) ಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟಪರಿಮಾಣ ಪದವು (ಅಂದರೆ $x^2$)ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಇದು $3x$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ ಶೇಷ $– 5x^2 – x + 5$ ಬರುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 2 :** ಈಗ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿನ ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ, ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯದಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಮಾಣ ಪದ (ಅಂದರೆ $– 5x^2$) ವನ್ನು ಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಟ ಪರಿಮಾಣ ಪದ (ಅಂದರೆ $x^2$)ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ $– 5$ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೇ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು $– 5x^2 – x + 5$ ಯಿಂದ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು.

**ಹಂತ 3 :** ಉಳಿದ ಶೇಷ $9x + 10$. ಇದರ ಪರಿಮಾಣ ಭಾಜಕ $x^2 + 2x + 1$ ನ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಹಾಗಾಗಿ ನಿಯಮ ಪ್ರಕಾರ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುವುದಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಹಾಗಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ $3x – 5$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು $9x + 10$ ಆಗಿದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $(x^2 + 2x + 1) \times (3x – 5) + (9x + 10) = (3x^3 + 6x^2 + 3x – 5x^2 – 10x – 5 + 9x + 10)$

$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

ಎಂದರೆ ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ ನಾವು ಭಾಗಾಹಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

**$p(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು ಎಂಬ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು $g(x) \neq 0$ ಆದಾಗ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕೆಂದರೆ**

**$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$** ಆಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ಗರಿಷ್ಠಘಾತ $<$ $g(x)$ ನ ಗರಿಷ್ಠಘಾತ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮವಾಗಿ ಹೆಸರಿಸಬಹುದು.

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(i) $q(x)$ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ $r(x) = r$ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

(ii) $q(x)$ ನ ಪರಿಮಾಣ 1 ಆದರೆ $p(x)$ನ ಪರಿಮಾಣ $= 1 + g(x)$ನ ಪರಿಮಾಣವಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) $p(x)$ನ್ನು $(x - a)$ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ $p(a)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(iv) $r = 0$ ಆದರೆ $p(x)$ನ್ನು $q(x)$ ಖಚ್ಚಿತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ಅಥವಾ $q(x)$ ಎನ್ನುವುದು $p(x)$ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ-10.** $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ನ್ನು $x - 1 - x^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಭಾಗಾಕಾರ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಾಗಾಗಿ ಭಾಜ್ಯ $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ಮತ್ತು

ಭಾಜಕ $= -x^2 + x - 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \;\; + \quad - \quad + \\ \hline & \qquad 2x^2 - 2x + 5 \\ & \qquad 2x^2 - 2x + 2 \\ & \qquad\; - \quad + \quad - \\ \hline & \qquad\qquad 3 \end{array}$$

ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಶೇಷದ ಪರಿಮಾಣ ಭಾಜಕ $(-x^2 + x - 1)$ದ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ $= x - 2$, ಶೇಷ $= 3$.

ಈಗ,

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ $\times$ ಭಾಗಲಬ್ಧ + ಶೇಷ

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಲಾಗಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-11.** $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{2}$ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು

$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
x^2 + 0x - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 \\
 & - \quad\quad + \\ \hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 + 0x^2 + 6x \\
 & + \quad\quad - \\ \hline
 & x^2 + 0x - 2 \\
 & x^2 + 0x - 2 \\
 & - \quad\quad + \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಪದ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿನ ಎರಡನೇ ಪದ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿನ ಮೂರನೆ ಪದ $\frac{x^2}{x^2} = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

ಈಗ, $2x^2 - 3x + 1$ $-3x$ನಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದ $-3x$ನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರೆದರೆ $(2x - 1)(x - 1)$ ಬರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $x = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $x = 1$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಬಂದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ – 3.4

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ $p(x)$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $g(x)$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು, ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

2. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಪವರ್ತನ ಆಗುತ್ತದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ಆದರೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ $x - 2$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $-2x + 4$ ಆದರೆ $g(x)$ ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ವಿಧವಾಗಿ $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

(i) $p(x)$ ಪರಿಮಾಣ $= q(x)$ ಪರಿಮಾಣ (ii) $q(x)$ ಪರಿಮಾಣ $= r(x)$ ಪರಿಮಾಣ

(iii) $r(x)$ ಪರಿಮಾಣ $= 0$

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ :

**[ಈ ಅಭ್ಯಾಸ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ]**

1. ಕೆಳಗಿನ ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಆಗುವವೋ ? ಇಲ್ಲವೋ ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸರಿನೋಡಿರಿ.

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ ; $(\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

2. ಒಂದು ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ಎರಡೆರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2, –7 ಮತ್ತು –14 ಆದರೆ ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $a - b$, $a$, $a + b$ ಆದರೆ $a$, $b$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

4. $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ ನ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು $2 \pm \sqrt{3}$ ಆದರೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $x^2 - 2x + k$ ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ $x + a$ ಆದರೆ $k$ ಮತ್ತು $a$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

**ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿಗಳು-ಶೂನ್ಯತೆ-ರೇಖಾನಕ್ಷೆ**

★ $ax^2+bx+c$ ಎಂಬ ವರ್ಗಬಹುಪದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ರೇಖಾನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ i) $a > 0$ ii) $a < 0$ iii) $b > 0$ iv) $b < 0$ v) $b = 0$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಕುವುದು. ಅವುಗಳ ಶೂನ್ಯತೆ ಮತ್ತು ರೇಖಾನಕ್ಷೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದು.

**ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :**

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಾಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ.

1. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಟಘಾತಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2 ಮತ್ತು 3 ಹೊಂದಿದವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗಾತ್ಮಕ, ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೆನ್ನುವರು.

2. $x$ ಚರಾಕ್ಷರ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಹೊಂದಿದ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು $ax^2 + bx + c$, ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a, b, c$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.

3. $p(x)$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಅದರ ರೇಖಾಚಿತ್ರ $y = p(x)$, $x$-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

4. ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಶೂನ್ಯತೆಗಳು, ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಮೂರು ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

5. $\alpha$ ಮತ್ತು $\beta$ ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ

   $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ಆಗುತ್ತವೆ.

6. $\alpha$, $\beta$ ಮತ್ತು $\gamma$ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ

   $$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

   ಮತ್ತು $\alpha\beta\gamma = \dfrac{c}{a}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

7. $p(x)$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $g(x)$ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎನ್ನುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

   $p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$,

   ಇದರಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ಪರಿಮಾಣ $< g(x)$ ನ

   $r(x) \neq 0$ ಪರಿಮಾಣವಾಗುತ್ತದೆ.

# ಅಧ್ಯಾಯ 4

# ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ

## (Pair of Linear Equationsin Two Variables)



### 4.1 ಪರಿಚಯ

ಸಿರಿ ಒಂದು ಸಾರಿ ಅವರ ತಂದೆಯೊಡನೆ ಸೇರಿ ಪುಸ್ತಕದ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗಿ 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು 2 ಪೆನ್ನುಗಳು ಕೊಂಡಳು. ಈ ಒಟ್ಟು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಅವರ ತಂದೆ ₹ 80 ಕೊಟ್ಟರು. ಆಕೆಯ ಸ್ನೇಹಿತೆ ಲಕ್ಷ್ಮಿ ಆ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು, ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಇಷ್ಟಪಟ್ಟು ಅದೇ ವಿಧವಾದ 4 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹110 ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಳು. ಆಕೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಸ್ನೇಹಿತರು ರುಬೀನಾ ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು, ಜೋಸೆಫ್ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಇಷ್ಟಪಟ್ಟರು. ಅವರು ಸಿರಿಯನ್ನು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಕೇಳಿದರು. ಆದರೆ ಆಕೆಗೆ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲ. ಅವರು ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯದು. ಅವು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳು ಅಥವಾ ಚರಾಕ್ಷರಗಳು. ನಮಗೆ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಎದುರಾಗುತ್ತವೆ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

ಈ ಕೆಳಗೆ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) 1 ಕಿಲೋ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಮತ್ತು 2ಕಿಲೋ ಟಮೋಟಾಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 30 . ಎರಡು ದಿನಗಳ ನಂತರ, 2ಕಿಲೋ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಮತ್ತು 4ಕಿಲೋ ಟಮೋಟಾಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 66.

(ii) ಎಮ್.ಕೆ.ನಗರ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡದ ಶಿಕ್ಷಕ 3 ಬ್ಯಾಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 6 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ₹ 3900 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡನು. ನಂತರ ಅವರು ಮತ್ತೊಂದು ಬ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು 2 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ₹ 1300 ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡರು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

### 4.1.1 ಅವ್ಯಕ್ತ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ?

ಪರಿಚಯದಲ್ಲಿ, ಸಿರಿ 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹80 ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಳು. ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ರುಬೀನಾ, ಜೋಸೆಫ್ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ರುಬೀನಾ ಪ್ರತಿ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ₹ 25 ಇರಬಹುದೆಂದು ಹೇಳಿದಳು. ಆಗ ಮೂರು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 75, ಎರಡು ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 5 ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ 2.50 ಇರಬಹುದು.

ಜೋಸೆಫ್ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ 2.50 ಎನ್ನುವುದು ಬಹಳ ಕಡಿಮೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದನು. ಆತನು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಕನಿಷ್ಟ ₹ 16 ಇರಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆಗ ಪ್ರತಿ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಸಹ ₹ 16 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 80ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗೆ ಅನೇಕ ಬೆಲೆಗಳು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಸಿರಿ, ಲಕ್ಷ್ಮಿಯರು ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟೋ ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ? ಕೇವಲ ಸಿರಿ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾರೆವು.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಲಕ್ಷ್ಮಿ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸಹ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಇದ್ದಾಗ ಒಂದೇ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ ಬೇಕೆಂದರೆ ಕನಿಷ್ಟ ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರಬೇಕು. ಈ ಅವ್ಯಕ್ತ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ 'ಮೋಡಲ್ ವಿಧಾನ' ಒಂದು ಪದ್ಧತಿ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಆಯತಗಳು ಅಥವಾ ಚೌಕಗಳ ಭಾಗಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ಮೋಡಲ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

### 4.1.2 ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು

ಲಕ್ಷ್ಮೀ ಸಹ ಸಿರಿಕೊಂಡ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು, ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನೇ ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ. ಆಕೆ 4 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ನುಗಳಿಗೆ ₹ 110 ನೀಡಿದ್ದಾಳೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(i) 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ + 2 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ = ₹ 80.

(ii) 4 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ + 3 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ = ₹ 110.

ಇದು ನಮಗೆ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ, ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆಯೇ?

ರುಬೀನಾ ಊಹಿಸಿ ಹೇಳಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ₹25 ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ 2.50 ಆದಾಗ,

4 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ : $4 \times 25 =$ ₹100

ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ : $3 \times 2.50 =$ ₹ 7.50

ರುಬೀನಾ ಹೇಳಿದ್ದು ಸತ್ಯವಾದರೂ ಲಕ್ಷ್ಮಿ ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ₹100 + ₹ 7.50 = ₹ 107.50 ಕೊಟ್ಟಿರಬೇಕು. ಆದರೆ ಈಕೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದು ₹ 110.

ಈಗ ಜೋಸೆಫ್ ಹೇಳಿದ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ನೋಡೋಣ.

1 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹16,ಆದರೆ 4 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ : $4 \times 16 =$ ₹64

1 ಪೆನ್ನು ಬೆಲೆ ₹16,ಆದರೆ 3 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ : $3 \times 16 =$ ₹ 48

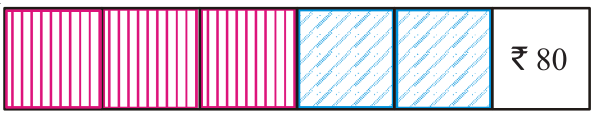
ಜೋಸೆಫ್ ಹೇಳಿದ್ದು ಸತ್ಯವಾದರೆ, ಲಕ್ಷ್ಮಿ ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ₹ 64 + ₹48 = ₹ 112 ಕೊಟ್ಟಿರಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಇದು ಆಕೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.

ಹಾಗಾದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು? ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕ, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು?

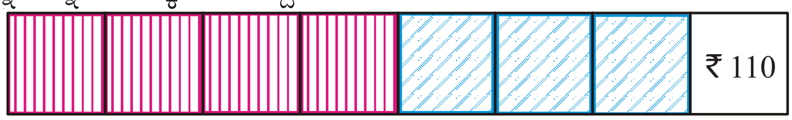
ನಮಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ಇದ್ದು ಆದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ರಾಶಿಗಳು (ಚರಾಕ್ಷರಗಳು) ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

**ಹಂತ -1** : ನೋಟು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಿಂದ, ಪೆನ್ನನ್ನು ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

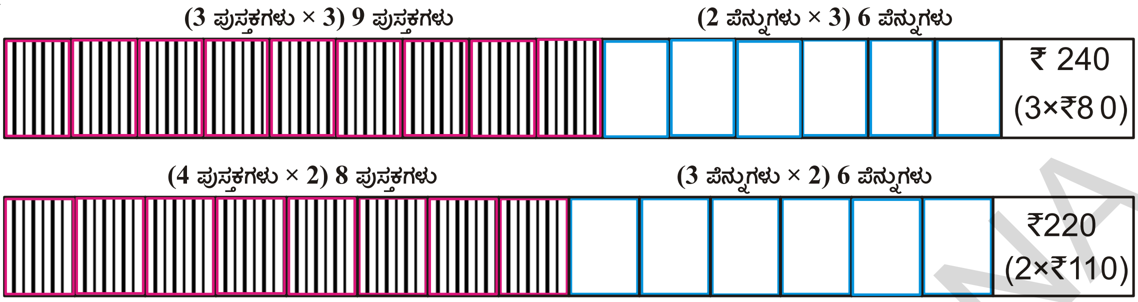
ಸಿರಿ 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು 2 ಪೆನ್ನುಗಳಿಗೆ ₹ 80 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ.




ಲಕ್ಷ್ಮಿ 4 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು 3 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹ 110 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ.



ಹಂತ **-2** : ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರಾಶಿಯನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಆ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು (ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಬೇಕು)




ಹಂತ 2 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಸಮಾನುಪಾತ ತರ್ಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಸಿರಿ 3 ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 2 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹ 80 ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ ಆದ್ದರಿಂದ 9 ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 6 ಪೆನ್ನುಗಳಿಗೆ:

$3 \times 3 = 9$ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು $3 \times 2 = 6$ ಪೆನ್ನುಗಳು, ಬೆಲೆ $3 \times 80 =$ ₹240 (1)

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ, ಲಕ್ಷ್ಮಿ 4 ಪುಸ್ತಕಗಳು, 3 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹ 110 ಗಳಿಗೆ ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ ಆದ್ದರಿಂದ :

$2 \times 4 = 8$ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು $2 \times 3 = 6$ ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ $2 \times 110 =$ ₹220 (2)

(1) (2) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇರುವ 1 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ

₹ 240 - ₹220 = ₹20. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ₹20.

ಸಿರಿ 3 ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 2 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ₹80 ಕ್ಕೆ ಕೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ. ಪ್ರತಿ ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ₹20ಆದ್ದರಿಂದ 3 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 60 ಆಗ 2 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 80 - ₹ 60 = ₹ 20.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹ 20 ÷ 2 = ₹10.

ಲಕ್ಷ್ಮಿ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. 4 ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 80 ಮತ್ತು 3ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ₹30 ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ₹110 ಎನ್ನುವುದು ಸತ್ಯ.

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮತ್ತು ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ ಅಥವಾ ಪರಿಹಾರ ಬೇಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಇದ್ದಾಗ ಕನಿಷ್ಟ ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಬೇಕೆಂದು ನಮಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು, $a$, $b$, $c$ ಗಳು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತಾ ಕನಿಷ್ಟ $a$ ಅಥವಾ $b$ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗದಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು $x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. [ಈ ನಿಂಬಂಧನೆ ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $a^2 + b^2 \neq 0$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ].

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಅಲ್ಲ?

a) $5 + 4x = y + 3$ b) $x + 2y = y - x$

c) $3 - x = y^2 + 4$ d) $x + y = 0$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ?

   a) $2x + 1 = y - 3$   b) $2t - 1 = 2t + 5$

   c) $2x - 1 = x^2$   d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $2(x + 3) = 18$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲ(ಪರಿಹಾರ) ಯಾವುದು?

   a) 5   b) 6   c) 13   d) 21

4. $2x - (4 - x) = 5 - x$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ $x$ ನ ಬೆಲೆ

   a) 4.5   b) 3   c) 2.25   d) 0.5

5. $x - 4y = 5$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ

   a) ಮೂಲಗಳು ಇಲ್ಲ   b) ಒಂದೇ ಒಂದು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಮೂಲ

   c) ಎರಡು ಮೂಲಗಳು   d) ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಮೂಲಗಳು

## 4.2 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳು, ಪೆನ್ನುಗಳ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಇವೆ? ನಮಗೆ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಇವೆ. ಈ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಮೂಲ ಎಂದರೇನು?

ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ $x,y$ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆಗಳ ಜೊತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಮೂಲ ಅಥವಾ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

### 4.2.1 ಗ್ರಾಫ್ ಪದ್ದತಿಯ ಮೂಲಕ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಇರುವ ಮೂಲ (ಪರಿಹಾರ)ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಸೀಮಿತ (ಎಣಿಸಲಾರದಷ್ಟು), ಒಂದೇ ಅಥವಾ ಮೂಲಗಳೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೇ?

ಈ ಮುಂಚೆ ನಾವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಮೋಡಲ್ ಪದ್ದತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಗ್ರಾಫ್‌ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

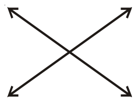
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $(a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $(a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ ಗಳು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಜೊತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಗ್ರಾಫ್ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಈ ರೇಖೆ ಮೇಲೆ ಇರುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ $(x, y)$ ಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಮೂಲಗಳು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

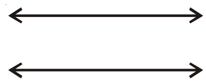
ನಮಗೆ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಇದ್ದಾಗ, ಅವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಸಂಬಂಧಗಳಾವುವು. ಈ ಸಂಬಂಧಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಏನು?

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಎಳೆದಾಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಧ್ಯ

i) ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.



ii) ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆ ಇರಬಹುದು.ಅಂದರೆ ಅವು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಆಗಬಹದು.

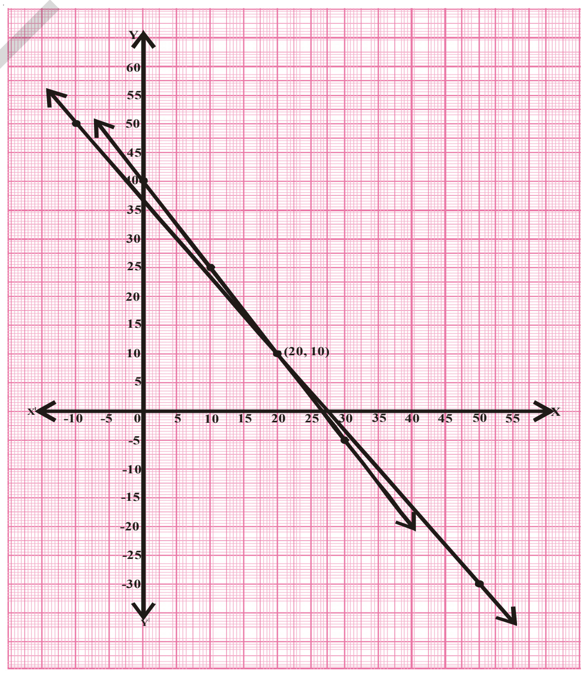


iii) ಆ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಬಹುದು.

ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಆ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ, ಮೊದಲನೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು $x$ ,$y$ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ $x$ ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು, $y$ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳು $3x + 2y = 80$ ಮತ್ತು $4x + 3y = 110$.

| **$3x + 2y = 80$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \dfrac{80-3x}{2}$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = \dfrac{80-3(0)}{2} = 40$ | (0, 40) |
| 10 | $y = \dfrac{80-3(10)}{2} = 25$ | (10, 25) |
| 20 | $y = \dfrac{80-3(20)}{2} = 10$ | (20, 10) |
| 30 | $y = \dfrac{80-3(30)}{2} = -5$ | (30, -5) |

| **$4x + 3y = 110$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \dfrac{110-4x}{3}$ | $(x, y)$ |
| -10 | $y = \dfrac{110-4(-10)}{3} = 50$ | (-10, 50) |
| 20 | $y = \dfrac{110-4(20)}{3} = 10$ | (20, 10) |
| 50 | $y = \dfrac{110-4(50)}{3} = -30$ | (50, -30) |




ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕಾರ್ಟಿಷಿ ಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಗ್ರಾಫನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇಧನ ಬಿಂದು (20, 10) ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಈಗ $x$ ಮತ್ತು $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $3(20) + 2(10) = 80$ ಮತ್ತು $4(20) + 3(10) = 110$.

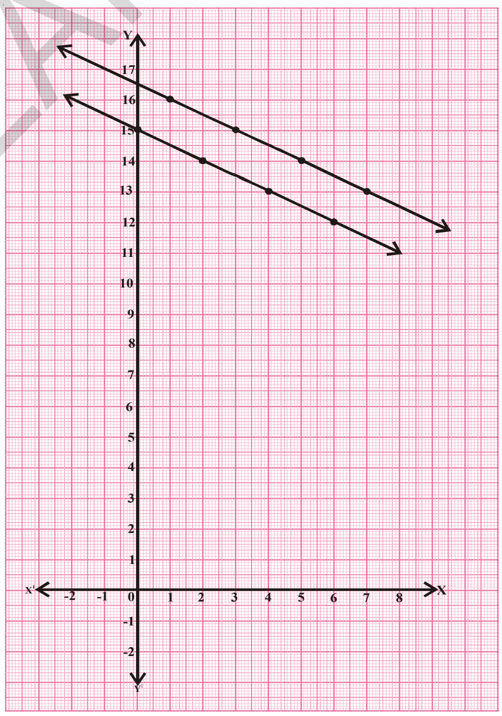
ಆದ್ದರಿಂದ ಗ್ರಾಫ್ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿ ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ₹20 ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ₹10ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಮೋಡಲ್ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಸಹ ನಮಗೆ ಇವೇ ಬೆಲೆಗಳು ಬಂದ ವಿಷಯವನ್ನು ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ.

(20, 10) ಬಿಂದು ಆ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ ಇರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಗತ (ಏಕರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸ್ವತಂತ್ರ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ನಾವು ಅದರಲ್ಲಿ 1 ಕಿಲೋ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು 1 ಕಿಲೋ ಟಮೋಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. 1 ಕಿಲೋ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಬೆಲೆ ₹$x$ ಮತ್ತು 1 ಕಿಲೋ ಟಮೋಟ ಬೆಲೆ ₹ $y$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆಗ ಏರ್ಪಡುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು $1x+2y=30$ ಮತ್ತು $2x+4y=66$.

| **$x + 2y = 30$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{30-x}{2}$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = \frac{30-0}{2} = 15$ | (0, 15) |
| 2 | $y = \frac{30-2}{2} = 14$ | (2, 14) |
| 4 | $y = \frac{30-4}{2} = 13$ | (4, 13) |
| 6 | $y = \frac{30-6}{2} = 12$ | (6, 12) |

| **$2x + 4y = 66$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{66-2x}{4}$ | $(x, y)$ |
| 1 | $y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$ | (1, 16) |
| 3 | $y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$ | (3, 15) |
| 5 | $y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$ | (5, 14) |
| 7 | $y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$ | (7, 13) |



ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಗ್ರಾಫಿನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಅಸಲು ಛೇಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲ (ಪರಿಹಾರ) ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಆಲೂಗಡ್ಡೆ, ಟಮೋಟ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸಹ ಇದು ಸತ್ಯವೇ. ಏಕೆಂದರೆ ತರಕಾರಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಈ ಬದಲಾವಣೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ಬದಲಾವಣೆ.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಯಾವ ಮೂಲಗಳು ಇಲ್ಲದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಅಸಂಗತ (ಏಕರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದದ) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

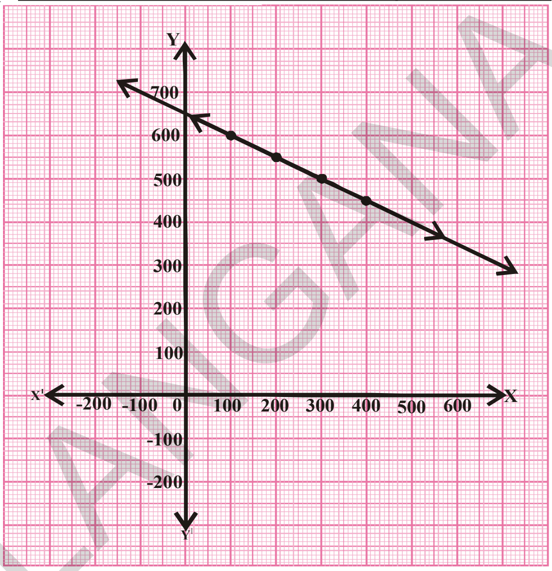
ಹಾಗೆಯೇ ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಎರಡನೆ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಬ್ಯಾಟು ಬೆಲೆ ₹ x ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆ ₹$y$. ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ $3x + 6y = 3900$ ಮತ್ತು $x + 2y = 1300$.

| **$3x + 6y = 3900$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{3900-3x}{6}$ | $(x, y)$ |
| 100 | $y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$ | (100, 600) |

| **$x + 2y = 1300$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{1300-x}{2}$ | $(x, y)$ |
| 100 | $y = \frac{1300-100}{2} = 600$ | (100, 600) |

| | | |
|---|---|---|
| 200 | $y = \dfrac{3900-3(200)}{6} = 550$ | (200, 550) |
| 300 | $y = \dfrac{3900-3(300)}{6} = 500$ | (300, 500) |
| 400 | $y = \dfrac{3900-3(400)}{6} = 450$ | (400, 450) |

| | | |
|---|---|---|
| 200 | $y = \dfrac{1300-200}{2} = 550$ | (200, 550) |
| 300 | $y = \dfrac{1300-300}{2} = 500$ | (300, 500) |
| 400 | $y = \dfrac{1300-400}{2} = 450$ | (400, 450) |




ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು?

ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ, ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲ (ಪರಿಹಾರ) ವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳವವು ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಪರಿಹಾರವುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬ್ಯಾಟು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ?

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಂಗತ ಜೊತೆ ಆಗುತ್ತದೆಯೇ? ಏಕೆ ಆಗುತ್ತದೆ (ಅಥವಾ) ಏಕೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ? ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$ ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$ iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. ಒಂದು ರೈಲು ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೈಲು ಹಳಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x + 2y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 4y - 12 = 0$ ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಿರಿ.

## 4.2.3 ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸ್ವಭಾವದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

$a_1, b_1, c_1$ ಮತ್ತು $a_2, b_2, c_2$ ಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ $\dfrac{a_1}{a_2}, \dfrac{b_1}{b_2}, \dfrac{c_1}{c_2}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬರೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸೋಣ.

| ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಜೊತೆಗಳು | $\frac{a_1}{a_2}$ | $\frac{b_1}{b_2}$ | $\frac{c_1}{c_2}$ | ಅನುಪಾತಗಳ ಹೋಲಿಕೆ | ಸೂಚಿಸುವ ಗ್ರಾಫ್ | ಬೀಜೋಕ್ತಿ ವಿವರಣೆ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $3x+2y-80=0$<br>$4x+3y-110=0$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{-80}{-110}$ | $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ | ಛೇಧನ ರೇಖೆಗಳು | ಏಕೈಕ ಮೂಲ (ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ) |
| 2. $1x+2y-30=0$<br>$2x+4y-66=0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{-30}{-66}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ | ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು | ಯಾವುದೇ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ |
| 3. $3x+6y=3900$<br>$x+2y=1300$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{6}{2}$ | $\frac{3900}{1300}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ | ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳು | ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಮೂಲಗಳು ಇರುತ್ತವೆ |

ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳೋ? ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೋ ? ಅಥವಾ ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳೋ ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಂಗತಗಳು ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x + y - 5 = 0$

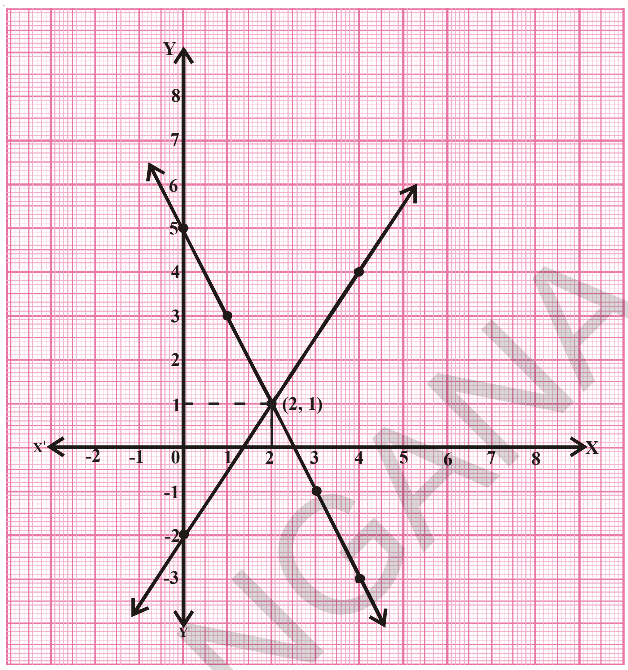
$3x - 2y - 4 = 0$

**ಪರಿಹಾರ :** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳು ಅಂದರೆ ಸಂಗತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ.

| **$2x + y = 5$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = 5 - 2x$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = 5 - 2(0) = 5$ | (0, 5) |
| 1 | $y = 5 - 2(1) = 3$ | (1, 3) |
| 2 | $y = 5 - 2(2) = 1$ | (2, 1) |
| 3 | $y = 5 - 2(3) = -1$ | (3, -1) |
| 4 | $y = 5 - 2(4) = -3$ | (4, -3) |

| **$3x - 2y = 4$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{4-3x}{-2}$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$ | (0, -2) |
| 2 | $y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$ | (2, 1) |
| 4 | $y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$ | (4, 4) |




ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ (ನಿರ್ಧಿಷ್ಟಬೆಲೆ) (2,1).

**ಉದಾಹರಣೆ -2.** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಸಂಗತ ಜೊತೆ ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

$3x + 4y = 2$ ಮತ್ತು $6x + 8y = 4$. ಗ್ರಾಫ್ ಎಳೆಯುವುದರ ಮೂಲಕ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $3x + 4y - 2 = 0$

$6x+8y - 4 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

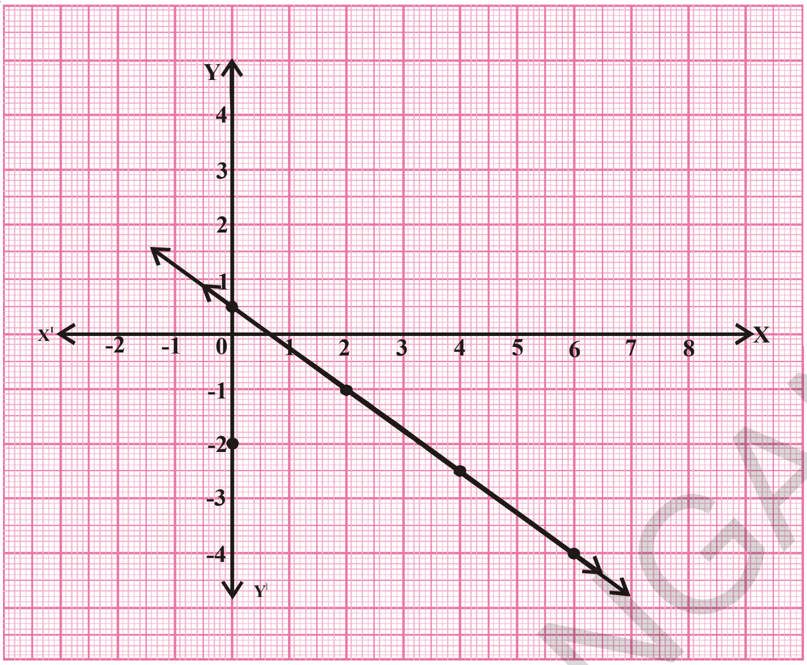
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳು, ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಭಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ.

**$3x + 4y = 2$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ**

| $x$ | $y = \frac{2-3x}{4}$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$ | $(0, \frac{1}{2})$ |
| 2 | $y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$ | (2, -1) |
| 4 | $y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$ | (4, -2.5) |
| 6 | $y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$ | (6, -4) |

**$6x + 8y = 4$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ**

| $x$ | $y = \frac{4-6x}{8}$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$ | $(0, \frac{1}{2})$ |
| 2 | $y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$ | (2, -1) |
| 4 | $y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$ | (4, -2.5) |
| 6 | $y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$ | (6, -4) |




**ಉದಾಹರಣೆ -3.** 2x-3y = 5 ಮತ್ತು 4x-6y = 15 ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 4x-6y - 15 = 0

2x-3y - 5 = 0

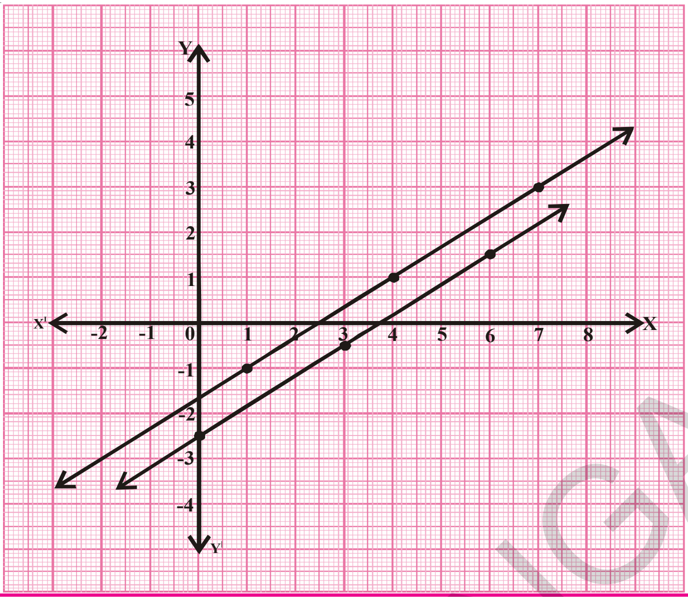
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1}$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

ಇವು ಅಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಇವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಮೂಲಗಳು ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರ (ಗ್ರಾಫ್) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು.

| **4x - 6y = 15** ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{15-4x}{-6}$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = \frac{15-0}{-6} = \frac{-5}{2}$ | (0, -2.5) |
| 3 | $y = \frac{15-4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$ | (3, -0.5) |
| 6 | $y = \frac{15-4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$ | (6, 1.5) |

| **2x - 3y = 5** ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{5-2x}{-3}$ | $(x, y)$ |
| 1 | $y = \frac{5-2(1)}{-3} = -1$ | (1, -1) |
| 3 | $y = \frac{5-2(4)}{-3} = 1$ | (4, 1) |
| 6 | $y = \frac{5-2(7)}{-3} = 3$ | (7, 3) |




## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳಿಗೆ ಏಕೈಕ ಮೂಲ (ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ), ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಮೂಲಗಳೋ ಅಥವಾ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ

(i) $2x+3y = 1$, $3x-y = 7$

(ii) $x + 2y = 6$, $2x + 4y = 12$

(iii) $3x + 2y = 6$, $6x + 4y = 18$

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ 'p' ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಏಕೈಕ ಮೂಲ ಇರುತ್ತದೆಯೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   $2x + py = - 5$ ಮತ್ತು $3x + 3y = - 6$
2. $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 =0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ, 'k' ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಅವು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. 'k' ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ, $3x + 4y + 2 = 0$ ಮತ್ತು $9x + 12y + k = 0$ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 'p' ನ ಯಾವ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆಯೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   $px + 3y - (p - 3) = 0$
   $12x + py - p = 0$

ಈಗ ನಾವು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -4.** ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಜೇನುನೊಣ ಮತ್ತು ಹೂವುಗಳು ಇವೆ. ಪ್ರತೀ ಹೂವಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಜೇನುನೊಣ ಕೂತಾಗ ಒಂದು ಜೇನುನೊಣ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಪ್ರತೀ ಹೂವಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಕೂತರೆ ಒಂದು ಹೂವು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಹೂವುಗಳೆಷ್ಟು? ಜೇನುನೊಣಗಳೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಜೇನುನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$ ಮತ್ತು
ಹೂಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= y$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ

ಪ್ರತೀ ಹೂವಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಜೇನುನೊಣ ಕೂತರೆ, ಒಂದು ಹೂವು ಉಳಿದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = y + 1$

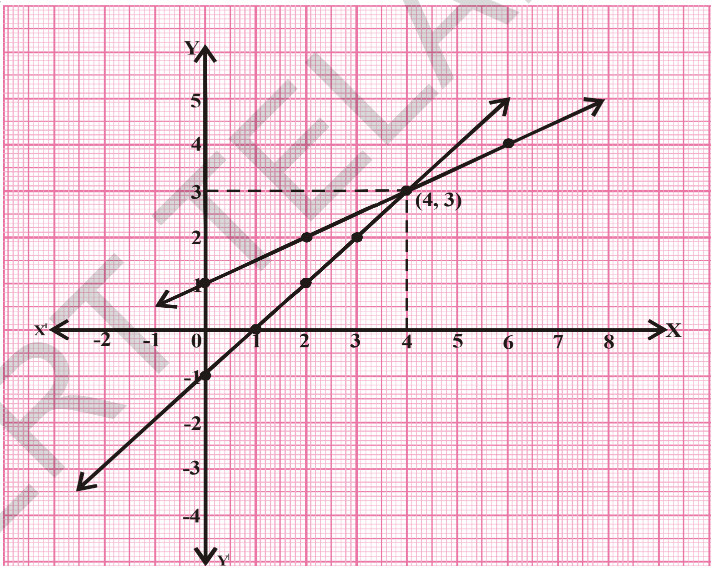
ಅಂದರೆ $x - y - 1 = 0$ ... (1)

ಪ್ರತಿ ಹೂವಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಜೇನುನೊಣಗಳು ಕೂತರೆ, ಒಂದು ಹೂವು ಉಳಿದು ಹೋಗುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ $x = 2(y- 1)$

ಅಂದರೆ $x - 2y+2 = 0$ ... (2)

| **$x - y - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = x - 1$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = 0 - 1 = -1$ | (0, -1) |
| 1 | $y = 1 - 1 = 0$ | (1, 0) |
| 2 | $y = 2 - 1 = 1$ | (2, 1) |
| 3 | $y = 3 - 1 = 2$ | (3, 2) |
| 4 | $y = 4 - 1 = 3$ | (4, 3) |

| **$x - 2y + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y = \frac{x+2}{2}$ | $(x, y)$ |
| 0 | $y = \frac{0+2}{2} = 1$ | (0, 1) |
| 2 | $y = \frac{2+2}{2} = 2$ | (2, 2) |
| 4 | $y = \frac{4+2}{2} = 3$ | (4, 3) |
| 6 | $y = \frac{6+2}{2} = 4$ | (6, 4) |




ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ (4, 3) ಕತ್ತರಿಸುವ ಬಿಂದು

ಆದ್ದರಿಂದ ಜೇನುನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಮತ್ತು ಹೂವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3.

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಳದ ಸುತ್ತಳತೆ 32 ಮೀ. ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು 2 ಮೀ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು 1 ಮೀ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದೇ ಯಥಾರೀತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸ್ಥಳದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** .ಆಯತಾಕಾರ ಸ್ಥಳದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $l, b$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= lb$ ಮತ್ತು

ಸುತ್ತಳತೆ $= 2(l + b) = 32$ ಮೀ.

$l + b = 16$ ಅಥವಾ $l + b - 16 = 0$ ... (1)

ಆದರ ಉದ್ದವನ್ನು 2ಮೀ. ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ಏರ್ಪಟ್ಟ ಹೊಸ ಉದ್ದ $l + 2$ ಹಾಗೆಯೇ ಅಗಲವನ್ನು 1ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಹೊಸ ಅಗಲ $b - 1$.

ಆಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (l + 2)(b - 1)$

ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ

$(l + 2)(b - 1) = lb$

$lb - l + 2b - 2 = lb$ ಅಥವಾ $lb - lb = l - 2b + 2$

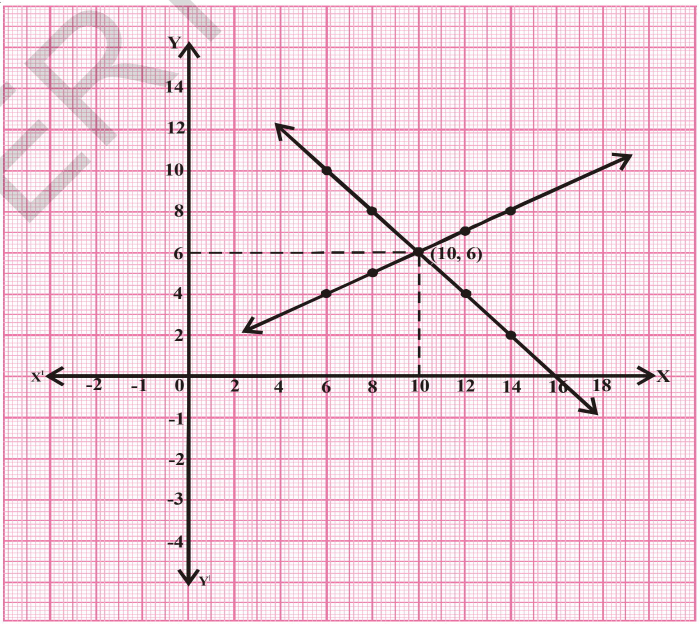
$l - 2b + 2 = 0$ ... (2)

| **$l + b - 16 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $l$ | $b = 16 - l$ | $(l, b)$ |
| 6 | $b = 16 - 6 = 10$ | (6, 10) |
| 8 | $b = 16 - 8 = 8$ | (8, 8) |
| 10 | $b = 16 - 10 = 6$ | (10, 6) |
| 12 | $b = 16 - 12 = 4$ | (12, 4) |
| 14 | $b = 16 - 14 = 2$ | (14, 2) |

| **$l - 2b + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ** | | |
|---|---|---|
| $l$ | $b = \frac{l+2}{2}$ | $(l, b)$ |
| 6 | $b = \frac{6+2}{2} = 4$ | (6, 4) |
| 8 | $b = \frac{8+2}{2} = 5$ | (8, 5) |
| 10 | $b = \frac{10+2}{2} = 6$ | (10, 6) |
| 12 | $b = \frac{12+2}{2} = 7$ | (12, 7) |
| 14 | $b = \frac{14+2}{2} = 8$ | (14, 8) |

ಆದರೆ ಆ ಆಟ ಸ್ಥಳದ ನಿಜವಾದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10ಮೀ. ಮತ್ತು 6ಮೀ.

ಉದ್ದದ ಅಳತೆಗಳು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, ಅಗಲದ ಅಳತೆಗಳು Y-ಅಕ್ಷವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ



## ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

1. ಗ್ರಾಫ್‌ಗಳು ಎಳೆಯದೇ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$, ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳೋ, ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೋ ಅಥವಾ ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| | | |
|---|---|---|
| a) $5x- 4y + 8 = 0$ | b) $9x+3y + 12 = 0$ | c) $6x - 3y + 10 = 0$ |
| $7x+6y-9 = 0$ | $18x+6y + 24 = 0$ | $2x - y + 9 = 0$ |

2. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣ ಜೊತೆಗಳು ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳೋ, ಅಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ (ಗ್ರಾಫ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ) ಬಿಡಿಸಿರಿ.

| | | |
|---|---|---|
| a) $3x+2y=5$ | b) $2x - 3y = 8$ | c) $\frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y = 7$ |
| $2x - 3y=7$ | $4x - 6y = 9$ | $9x - 10y=14$ |
| d) $5x-3y = 11$ | e) $\frac{4}{3}x+2y = 8$ | f) $x + y = 5$ |
| $-10x+6y = -22$ | $2x+3y = 12$ | $2x+2y = 10$ |
| g) $x - y = 8$ | h) $2x + y-6 = 0$ | i) $2x-2y - 2 = 0$ |
| $3x-3y = 16$ | $4x-2y- 4 = 0$ | $4x-4y- 5 = 0$ |

3. ನೇಹ ಕೆಲವು ಪ್ಯಾಂಟುಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಕರ್ಟುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬಟ್ಟೆ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋದಳು. ಆಕೆಯ ಸ್ನೇಹಿತೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ಯಾಂಟುಗಳು, ಎಷ್ಟು ಸ್ಕರ್ಟುಗಳು ಕೊಂಡೆ ಎಂದು ಕೇಳಿದಾಗ ಆಕೆ ಹೀಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿದಳು " ನಾನು ಕೊಂಡ ಸ್ಕರ್ಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಪ್ಯಾಂಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ ಎರಡು ಕಡಿಮೆ, ಹಾಗೆಯೇ ಸ್ಕರ್ಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ಯಾಂಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟುಕ್ಕಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಕಡಿಮೆ".
   ಸ್ನೇಹ ಎಷ್ಟು ಪ್ಯಾಂಟುಗಳು, ಎಷ್ಟು ಸ್ಕರ್ಟುಗಳು ಕೊಂಡಳೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಆಕೆಯ ಸ್ನೇಹಿತೆಗೆ ಸಹಾಯಪಡಿರಿ.
4. 10 ನೇ ತರಗತಿ ಓದುವ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಗಣಿತ ಕ್ವಿಜ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಂಡ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 4 ಹೆಚ್ಚು ಆದರೆ ಆ ಕ್ವಿಜ್‌ನಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಂಡ ಬಾಲ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 5 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ಒಟ್ಟು ₹ 50 ಹಾಗೆಯೇ 7 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ (ಒಂದೇ ವಿಧ) ₹46. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಮತ್ತು ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 4 ಮೀ.ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದ ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತಾಕಾರ ತೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ 36ಮೀ. ಆದರೆ ತೋಟದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $2x + 3y - 8 = 0$ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ. ಇದರಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತಿರುವ ಹಾಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯಿರಿ.
   ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಆಗುವಂತೆ, ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳು ಆಗುವಂತೆ ಮತ್ತೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 5 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು 2 ಮೀ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 80 ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉದ್ದವನ್ನು 10 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು 5 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 50 ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಆದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬೆಂಚಿನಲ್ಲಿ ಮೂವರಂತೆ ಕುಳಿತಾಗ, ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಲು ಸ್ಥಳವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಂತ ಒಂದೊಂದು ಬೆಂಚಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ವರಂತೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕುಳಿತರೆ, ಒಂದು ಬೆಂಚ ಖಾಲಿಯಾಗಿ ಉಳಿದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು? ಬೆಂಚಿಗಳೆಷ್ಟು? ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 4.3 ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಪದ್ದತಿಗಳಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು

ಗ್ರಾಫ್ ಅಥವಾ ನಕ್ಷೆಯ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕೋ ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಆಗದಿದ್ದಾಗ ಈ ಗ್ರಾಫ್ ವಿಧಾನ ಅಷ್ಟೊಂದು ಅನುಕೂಲಕರ ಅಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೆಲೆಗಳು $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ ಮುಂತಾದ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸುವಾಗ, ಗ್ರಾಫ್‌ನಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ತಪ್ಪು ನಡೆಯುವ ಅವಕಾಶಗಳು ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚು. ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಇತರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಧಾನಗಳಿವೆಯೇ? ಬಹಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಪದ್ದತಿಗಳು ಇವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

### 4.3.1 ಆದೇಶ ವಿಧಾನ (Substitution Method )

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು, ಎರಡನೆ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲವರಾದರೆ, ಈ ವಿಧಾನ ಬಹಳ ಉಪಯೋಗಕರ. ಹಂತಗಳ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಹಂತ**-1** : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ, ಚರಾಕ್ಷರ $y$ ಯನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರ $x$ ಪದಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ**-2** : ಒಂದನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಚರಾಕ್ಷರ '$y$' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ.

ಹಂತ **-3** : ಹಂತ 2 ರಿಂದ ಬಂದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ $x$ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಹಂತ **-4** : ಹಂತ 3 ರಲ್ಲಿ ಬಂದ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೋ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ $y$ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ**-5** : ಹೀಗೆ ದೊರೆಯುವ $x$ , $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$2x - y = 5$

$3x + 2y = 11$

**ಪರಿಹಾರ :** $2x - y = 5$ (1)

$3x + 2y = 11$ (2)

(1) ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು (ಹಂತ 1)

$y = 2x - 5$

ಇದನ್ನು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ (ಹಂತ 2)

$3x + 2(2x - 5) = 11$

$3x + 4x - 10 = 11$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$ (ಹಂತ 3)

$x = 3$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$2(3) - y = 5$ (ಹಂತ 4)

$y = 6 - 5 = 1$

$x, y$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $3(3) + 2(1) = 9 + 6 = 11$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 3$ ಮತ್ತು $y = 1$ ಸಮೀಕರಣದ ಬೆಲೆಗಳು (ಹಂತ 5)

ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $x = 3$ ಮತ್ತು $y = 1$ ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆದೇಶ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1) $3x - 5y = -1$
   $x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$
   $2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$
   $3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$
   $3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$
   $0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
   $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

### 4.3.2 ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ (Method of Elimination of a variable)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಆ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ತೊಲಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಮೀಕರಣ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಒಂದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವ ಮೂಲಕ ಎರಡನೇ ಚರಾಕ್ಷರ ಅಥವಾ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಇದರಲ್ಲಿನ ಮುಖ್ಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಹಂತ-**1** : ಕೊಟ್ಟ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $ax + by = c$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ-**2** : ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹ ಗುಣಕವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಂತ-**3** : ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಮಾಡಿ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಹಂತ-**4** : ಉಳಿದ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆಗೋಸ್ಕರ ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಹಂತ-**5** : ಈ ಅವ್ಯಕ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ, ನಾವು ಮೊದಲು ವರ್ಜಿಸಿದ ಚರಾಕ್ಷರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಉದಾ -7.** ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$3x + 2y = 11$

$2x + 3y = 4$

**ಪರಿಹಾರ :** $3x + 2y = 11$ (1)

$2x + 3y = 4$ (2) (ಹಂತ 1)

ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ '$y$' ಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸಬೇಕೆಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ 'y' ಸಹಗುಣಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3. ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. 6. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 3 ರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಸಮೀಕರಣ (1) × 3 $\quad 9x + 6y = 33$ (ಹಂತ 2)

ಸಮೀಕರಣ (2) × 2 $\quad 4x + 6y = 8$

$\quad (-) \quad (-) \quad (-)$ (ಹಂತ 3)

$5x = 25$

$x = \frac{25}{5} = 5$ (ಹಂತ 4)

$x = 5$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$3(5) + 2y = 11$

$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$ (ಹಂತ 5)

ಹೀಗೆ, $x = 5, y = -2$ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರ ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1. $8x + 5y = 9$, $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$, $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$, $5x - 6y = -9$

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

ಈಗ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ।

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** ರುಬೀನಾ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ₹ 2000 ಹಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳ ಬಯಸಿದ್ದಾಳೆ. ಆಕೆ ಕ್ಯಾಷಿಯರ್‌ನನ್ನು ಆ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ₹ 50 ಮತ್ತು ₹ 100 ನೋಟುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಕೊಡಿ ಎಂದು ಕೇಳಿದಳು. ಒಟ್ಟು ಆಕೆಗೆ 25 ನೋಟುಗಳು ಬಂದರೆ, ಆಕೆಗೆ ಎಷ್ಟು ₹ 50 ನೋಟುಗಳು, ಎಷ್ಟು ₹ 100 ನೋಟುಗಳೂ ಬಂದಿವೆಯೋ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಆಕೆಗೆ ಬಂದ ₹ 50 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $x$ ಎಂದು

₹ 100 ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $y$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಆಗ, $x + y = 25$ (1)

ಮತ್ತು $50x + 100y = 2000$ (2)

ಇವುಗಳನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿದರೆ

(1))ನೇ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $x = 25 - y$

(2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $50(25 - y) + 100y = 2000$

$$1250 - 50y + 100y = 2000$$

$$50y = 2000 - 1250 = 750$$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

ಆದ್ದರಿಂದ ರುಬೀನಾ ಹತ್ತು ₹50 ನೋಟುಗಳನ್ನು, ಹದಿನೈದು ₹100 ನೋಟುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಳು.

**2ನೇ ಪದ್ಧತಿ** : ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು **ವರ್ಜಿಸುವ** ಪದ್ದತಿ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $x$ ನ ಸಹ ಗುಣಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1 ಮತ್ತು 50 ಆದ್ದರಿಂದ

ಸಮೀಕರಣ (1) × 50 $\quad 50x + 50y = 1250$

ಸಮೀಕರಣ (2) × 1 $\quad 50x + 100y = 2000$ ಒಂದೇ ಗುರ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$\underline{(-) \quad (-) \quad (-)}$

$$-50y = -750$$

ಅಥವಾ $\quad y = \frac{-750}{-50} = 15$

(1) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $x + 15 = 25$

$$x = 25 - 15 = 10$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಕೆ ಹತ್ತು ₹ 50 ನೋಟುಗಳನ್ನು, ಹದಿನೈದು ₹100 ನೋಟುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಳು.

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 3 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 1 ಅಂಕ ಕಳೆಯುವರು. ಈ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮಧು 40 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ಪ್ರತಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 4 ಅಂಕಗಳು ಹಾಕಿ,ಪ್ರತಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಅಂಕಗಳು ಕಳೆದರೆ ಅವನಿಗೆ 50 ಅಂಕಗಳು ಬರುತ್ತಿದ್ದವು. ಆದರೆ ಆ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಎಷ್ಟು? (ಮಧು ಪರೀಕ್ಷೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆದನು)

**ಪರಿಹಾರ :** ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x$;

ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $y$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಪ್ರತಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 3 ಅಂಕಗಳು ಹಾಕಿದರೆ ಪ್ರತಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 1 ಅಂಕ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವರು. ಆಗ ಅವನಿಗೆ ಬಂದ ಅಂಕಗಳು 40.

$$3x - y = 40 \qquad (1)$$

ಪ್ರತಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 4 ಅಂಕಗಳು ಹಾಕಿದರೆ ಪ್ರತಿ ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಅಂಕಗಳು ಕಳೆಯುವರು, ಆಗ ಅವನಿಗೆ 50 ಅಂಕಗಳು ಬರುತ್ತಿದ್ದವು.

$$4x - 2y = 50 \qquad (2)$$

**ಆದೇಶ ವಿಧಾನ**

(1) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ, $y = 3x - 40$

(2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $4x - 2\,(3x - 40) = 50$

$4x - 6x + 80 = 50$

$-2x = 50 - 80 = -30$

$x = \dfrac{-30}{-2} = 15$

$x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು (1) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$3(15) - y = 40$

$45 - y = 40$

$y = 45 - 40 = 5$

$\therefore$ ಆದ್ದರಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಾ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 15 + 5 = 20$

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ-9 ರಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** ಮೇರಿ ತನ್ನ ಮಗಳಿಗೆ ಹೀಗೆ ಹೇಳಿದಳು "ಏಳು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸು ಅಂದಿನ ನಿನ್ನ ವಯಸ್ಸಿಗೆ ಏಳರಷ್ಟು. ಹಾಗೆಯೇ ಇಂದಿನಿಂದ ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸು ನಿನ್ನ ವಯಸ್ಸಿಗೆ ಮೂರರಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. " ಆದರೆ ಮೇರಿ ಮತ್ತು ಆಕೆಯ ಮಗಳ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸುಗಳೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೇರಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು $x$ ವರ್ಷಗಳು. ಆಕೆ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು $y$ ವರ್ಷಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಏಳು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಮೇರಿ ವಯಸ್ಸು $x - 7$ ವರ್ಷ, ಆಕೆ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು $y - 7$ ವರ್ಷ.

$x - 7 = 7(y - 7)$

$x - 7 = 7y - 49$

$x - 7y + 42 = 0 \qquad (1)$

ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮೇರಿ ವಯಸ್ಸು $x + 3$ ಮತ್ತು ಆಕೆ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು $y + 3$.

$x + 3 = 3\,(y + 3)$

$x + 3 = 3y + 9$

$x - 3y - 6 = 0 \qquad (2)$

**ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ**

ಸಮೀಕರಣ 1 $\quad \cancel{x} - 7y = -42$

ಸಮೀಕರಣ 2 $\quad \cancel{x} - 3y = 6$

$\underline{(-) \quad (+) \quad (-)}$ $\quad$ $x$ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಗುರ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ

$-4y = -48$ $\quad$ ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

ಈ $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$x - 3(12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇರಿ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು 42 ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ಆಕೆ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು 12 ವರ್ಷ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ.**

ಉದಾಹರಣೆ -10 ರಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ-11.** ಒಬ್ಬ ಪ್ರಕಾಶಕ, ಹೊಸ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಿದ್ದ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಅದರ ಸ್ಥಿರಬೆಲೆ (ಪುನರ್ ವಿಮರ್ಶ, ಮುದ್ರಣೆ, ಟೈಪಿಂಗ್ ಖರ್ಚುಗಳು ಮೊದಲಾದವು) ಒಂದೊಂದು ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ₹ 31.25 ಇವಲ್ಲದೆ ಅವನು ಆ ಪುಸ್ತಕದ ಮುದ್ರಣೆಗಾಗಿ ₹ 320000 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು. ಆ ಪುಸ್ತಕದ ಠೋಕ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ₹ 43.75 (ಪ್ರಕಾಶಕನಿಗೆ ಬರುವ ಹಣ) ಆ ಪ್ರಕಾಶಕನ ಖರ್ಚುಗಳು, ಆದಾಯ ಸಮವಾಗಬೇಕೆಂದರೆ ಸಮತೌಲ್ಯನ ಸ್ಥಾನ ಸೇರಬೇಕೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮಾರಬೇಕು?

> ವಸ್ತುವಿನ ಉತ್ಪಾದನೆಗೆ ಆದ ಖರ್ಚು, ಅವುಗಳ ಮಾರಾಟದಿಂದ ಬಂದ ಸಂಪಾದನೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಮತೌಲ್ಯ ಸ್ಥಾನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಪ್ರಕಾಶನ ಸಮತೌಲ್ಯ ಸ್ಥಾನ ಸೇರಬೇಕೆಂದರೆ ಖರ್ಚುಗಳು ಆದಾಯ ಸಮವಾಗಬೇಕು.

ಮುದ್ರಣವಾಗಿ ಮಾರಾಟವಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x$.

ಸಮತೌಲ್ಯ ಸ್ಥಾನ y ಯಾಗಿರಲಿ

ಆಗ ಆ ಪ್ರಕಾಶಕನಿಗೆ ಮುದ್ರಣ ಖರ್ಚು, ಆದಾಯಗಳ ಸಮೀಕರಣ

ಮುದ್ರಣ ಸಮೀಕರಣ $y = 320000 + 31.25x$ ... (1)

ಆದಾಯ ಸಮೀಕರಣ $y = 43.75x$ ... (2)

ಎರಡನೆ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಒಂದನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$43.75x = 3,20,000 + 31.25x$$

$$12.5x = 3,20,000$$

$$x = \frac{3,20,000}{12.5} = 25,600$$

25,600 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಿ ಮಾರಿದರೆ ಅವನು ಸಮತೌಲ್ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೇರುತ್ತದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 4.2

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಬರೆದು ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

1. ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯಗಳ ಅನುಪಾತ 9 : 7 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಖರ್ಚುಗಳ ಅನುಪಾತ 4 : 3 ಪ್ರತಿ ಒಬ್ಬರೂ ತಿಂಗಳಿಗೆ ರೂ. 2000 ಹಣವನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವರ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಎರಡಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 66 ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತವೆ?

3. ಎರಡು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡಕೋನ, ಚಿಕ್ಕ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ $18^\circ$ ಹೆಚ್ಚು. ಆದರೆ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಹೈದರಾಬಾದ್‌ನಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಕ್ಸಿ ಚಾರ್ಜಿಗಳು ಎರಡು ವಿಧಗಳಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ.ಮೊದಲನೆಯದು ಸ್ಥಿರ ಚಾರ್ಜಿಯಾದರೆ ಎರಡನೆಯದು ದೂರವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಮಿ. ಅನುಸರಿಸಿ ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಚಾರ್ಜಿ ಮೊದಲ 3 ಕಿ.ಮೀ.ನವರೆಗೆ ಸ್ಥಿರಚಾರ್ಜ ನಂತರ ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ. 10 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದಾಗ ಆದ ಒಟ್ಟು ಚಾರ್ಜಿ ₹ 166.ಹಾಗೆಯೇ 15 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದಾಗ ಆದ ಒಟ್ಟು ಚಾರ್ಜಿ ₹ 256 ಆದರೆ,
   i. ಸ್ಥಿರ ಶುಲ್ಕ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಆಗುವ ಚಾರ್ಜಿಗಳ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
   ii. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ 25 ಕಿ.ಮೀ ದೂರ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಅವನು ಚಾರ್ಜಿಗಳಿಗಾಗಿ ನೀಡಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

5. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ, ಛೇದಗಳಿಗೆ 1 ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{4}{5}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಅಂಶ, ಛೇದಗಳಿಂದ 5 ಕಳೆದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ರಹದಾರಿಯ ಮೇಲೆ A, B ಎಂಬ ಪ್ರದೇಶಗಳು 100 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರದಲ್ಲಿವೆ. A ನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರು, ಬಿಂದು B ನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವೇಗಗಳಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿವೆ. ಆ ಎರಡು ಕಾರುಗಳು ಒಂದೇ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದರೆ ಅವು 5 ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಲ್ಲದೆ ಅವು ಒಂದೊರ ಕಡೆಗೆ ಒಂದು ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದ 1 ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಸೇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಕಾರುಗಳ ವೇಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು. ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಅಳತೆ, ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟುಗಿಂತ $3^\circ$ ಕಡಿಮೆ ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 1382 ಪುಟಗಳಿವೆ. ಇವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳು ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೆ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ 64 ಪೇಜಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಇವೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಪುಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ರಾಸಾಯನಗಳನ್ನು ಮಾರುವ ಅಂಗಡಿಯವನ ಹತ್ತಿರ ಎರಡು ವಿಧಗಳ ಹೈಡ್ರೋಕ್ಲೋರಿಕ್ ಆಮ್ಲ ದ್ರಾವಣಗಳಿವೆ. ಒಂದು 50% ದ್ರಾವಣ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು 80% ದ್ರಾವಣ. 100 ಮಿ.ಲೀ.68% ದ್ರಾವಣ ಬೇಕೆಂದರೆ ಆ ಎರಡು ದ್ರಾವಣಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬೇಕು.

10. ನಿನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಉಳಿತಾಯಕ್ಕಾಗಿ ₹12000 ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೋ. ಅದರಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಹಣವನ್ನು 10% ಬಡ್ಡಿದರಕ್ಕೆ ಉಳಿದಿದ್ದನ್ನು 15% ಬಡ್ಡಿದರೆ ಬರುವಂತೆ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಬೇಕು. ಆದರೆ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ನೀವು ಉಳಿತಾಯ 12% ಬಡ್ಡಿದರ ಬರಬೇಕೆಂದರೆ ಯಾವ ಬಡ್ಡಿಯದರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

## 4.4 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಲ್ಲ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಕೆಲವು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸರಿಯಾದ ಆದೇಶಗಳ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ-12.** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y} = 13$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y} = -2$$

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಲ್ಲ (ಏಕೆ)

ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳು $2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13$ (1)

$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2$ (2)

ನಾವು $\frac{1}{x} = p$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} = q$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ..

$2p + 3q = 13$ (3)

$5p - 4q = -2$ (4)

$q$ ಸಹಗುಣಕಗಳು 3 ಮತ್ತು 4 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. 12. ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ

ಸಮೀಕರಣ (3) × 4 $\quad 8p + \cancel{12q} = 52$

ಸಮೀಕರಣ (4) × 3 $\quad \underline{15p - \cancel{12q} = -6}$

$23p = 46$

'$q$' ನ ಪದಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿವೆ.. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$p = \frac{46}{23} = 2$

$p$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$2(2) + 3q = 13$

$3q = 13 - 4 = 9$

$q = \frac{9}{3} = 3$

ಆದರೆ, $\frac{1}{x} = p = 2 \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{y} = q = 3 \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

**ಉದಾಹರಣೆ-13.** ಕವಿತ ತನ್ನ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋಣೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಳು. ಆಕೆ ಗೃಹ ನಿರ್ಮಾಣ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ವಿಚಾರಣೆ ಮಾಡಿದಾಗ 6 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 8 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಸೇರಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 14 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುವರೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಆದರೆ ಆಕೆಗೆ ತನ್ನ ಮನೆಯಲ್ಲಿನ ಕೋಣೆಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದ ಕೆಲಸ 10 ದಿನಗಳಲ್ಲೇ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಬೇಕು. 8 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 12 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಸೇರಿ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲೇ ಪೂರ್ತಿಮಾಡುವರೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಳು. ಪುರುಷ ಅಥವಾ ಸ್ತ್ರೀ ಒಬ್ಬರೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಕಾಲ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆಯೋ? ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಪುರುಷನೊಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು ಹಿಡಿಡಿಯುವ ಕಾಲ $= x$ ದಿನಗಳು ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ

ಪುರುಷನೊಬ್ಬನೇ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{x}$

ಸ್ತ್ರೀ ಒಬ್ಬಳೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ $= y$ ದಿನಗಳು ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

ಸ್ತ್ರೀ ಒಬ್ಬಳೇ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{y}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

8 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 12 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಬಲ್ಲರು.

ಅಂದರೆ 8 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 12 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ $= \frac{1}{10}$ ...(1)

8 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ $8 \times \frac{1}{x}. = \frac{8}{x}$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 12 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

8 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 12 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ

ಒಟ್ಟು ಕೆಲಸ $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ .....(2)

(1) (2) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \qquad \text{... (3)}$$

ಹಾಗೆಯೇ , 6 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 8 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 14 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಬಲ್ಲರು.

6 ಮಂದಿ ಪುರುಷರು ಮತ್ತು 8 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \qquad 14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \qquad \text{... (4)}$$

(3)(4). ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ? ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ?

$\frac{1}{x} = u$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} = v$ ಆದೇಶಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(3) ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ $80u + 120v = 1$ (5)

(4) ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ $84u + 112v = 1$ (6)

80 ಮತ್ತು 84 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ1680, ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ

ಸಮೀಕರಣ (3) × 21 $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

ಸಮೀಕರಣ (4) × 20 $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$\cancel{1680u}+2520v = 21$$
$$\cancel{1680u}+2240v = 20$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$
$$280v = 1$$

$u$ ಗೆ ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ

$$v = \frac{1}{280}$$

ಸಮೀಕರಣ (5) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $80u + 120 \times \frac{1}{280} = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{80}}} = \frac{1}{140}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪುರುಷನೊಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 140 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, ಸ್ತ್ರೀ ಒಬ್ಬಳೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು 280 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಬಲ್ಲರು.

**ಉದಾಹರಣೆ -14.** ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ 370 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರ ರೈಲಿನಲ್ಲಿ, ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರ ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು 250 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರವನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲಿ, ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದಾಗ ಅವನಿಗೆ 4 ಗಂಟೆಗಳು ಹಿಡಿದಿದೆ. ಅದೇ ಅವನು 130 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರವನ್ನು ರೈಲ್ಲಿ ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಅವನಿಗೆ 18 ನಿಮಿಷಗಳ ಕಾಲ ಹೆಚ್ಚು ಹಿಡಿಯುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ರೈಲು ಮತ್ತು ಕಾರಿನ ವೇಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ರೈಲಿನ ವೇಗ $x$ ಕಿ.ಮೀ / ಗಂ., ಕಾರಿನ ವೇಗ $y$ ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಕಾಲ = $\frac{\text{ದೂರ}}{\text{ವೇಗ}}$

1ನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ = $\frac{250}{x}$ ಗಂ.

ಕಾರು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ = $\frac{120}{y}$ ಗಂ.

ಒಟ್ಟು ಕಾಲ = ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ + ಕಾರು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ = $\frac{250}{x} + \frac{120}{y}$

ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ 4 ಗಂಟೆಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \qquad \rightarrow (1)$$

ಮತ್ತೆ 130 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರ ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದಾಗ

130 ಕಿ.ಮೀ. ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ = $\frac{130}{x}$ ಗಂ.

240 ಕಿ.ಮೀ. (370 - 130) ಕಾರು ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಕಾಲ = $\frac{240}{y}$ ಗಂ.

ಒಟ್ಟು ಕಾಲ = $\frac{130}{x} + \frac{240}{y}$

ಆದರೆ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಒಟ್ಟು ಕಾಲ 4 ಗಂಟೆ 18 ನಿಮಿಷಗಳು $4\frac{\cancelto{3}{18}}{\cancelto{10}{60}}$ ಗಂಟೆಗಳು = $4\frac{3}{10}$ ಗಂಟೆಗಳು.

ಅಂದರೆ, $$\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \qquad (2)$$

(1) (2) ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $\frac{1}{x} = a$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} = b$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$125a + 60b = 2 \qquad (3)$$

$$130a + 240b = 43/10 \qquad (4)$$

60 ,240 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. 240. ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

ಸಮೀಕರಣ (3) × 4 $\qquad 500a + \cancel{240b} = 8$

ಸಮೀಕರಣ (4) × 1 $\qquad 130a + \cancel{240b} = \frac{43}{10}$ (ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ)

$\qquad (-) \quad (-) \quad (-)$

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\cancel{370}_{10}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$ ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\left(\overset{5}{\cancel{125}} \times \frac{1}{\underset{4}{\cancel{100}}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{60}}} = \frac{1}{80}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $a = \frac{1}{100}$ ಮತ್ತು $b = \frac{1}{80}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{x} = \frac{1}{100}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$

$x = 100$ ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ. ಮತ್ತು $y = 80$ ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ.

ಆದ್ದರಿಂದ ರೈಲಿನ ವೇಗ 100 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ ಮತ್ತು ಕಾರಿನ ವೇಗ 80 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 4.3

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

ii) $\frac{x+y}{xy} = 2$

$\frac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x+3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

v) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$

vi) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

$\dfrac{15}{x+y} + \dfrac{7}{x-y} = 10$ ಆದಾಗ $x \neq 0, y \neq 0$ $\qquad$ $\dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} = -2$ ಆದಾಗ $x \neq 0, y \neq 0$

vii) $\dfrac{10}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 4$ $\qquad$ viii) $\dfrac{1}{3x+y} + \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2(3x+y)} - \dfrac{1}{2(3x-y)} = \dfrac{-1}{8}$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   i. ದೋಣಿಯೊಂದು ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 30 ಕಿ.ಮೀ.ಮತ್ತು 44 ಕಿ.ಮೀ. ನೀರು ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಲು 10 ಗಂಟೆ ಕಾಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ ದೋಣಿಯು 13 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 40 ಕಿ.ಮೀ.ಮತ್ತು ನೀರಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 55 ಕಿ.ಮೀ ಚಲಿಸುವುದಾದರೆ ನೀರಿನ ಚಲನೆಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ದೋಣಿಯ ವೇಗವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

   ii. ರಹೀಮ ತನ್ನ ಮನೆಗೆ ಹೋಗುವುದಕ್ಕೆ 600 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ, ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರವನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರವನ್ನು ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುವನು. 120 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಆತನಿಗೆ 8 ಗಂಟೆ ಕಾಲ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಅದೇ 200 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಾರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಆತನಿಗೆ 20 ನಿಮಿಷಗಳ ಕಾಲ ಹೆಚ್ಚು ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ರೈಲು ಮತ್ತು ಕಾರಿನ ವೇಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   iii. ಇಬ್ಬರು ಹೆಂಗಸರು ಮತ್ತು 5 ಗಂಡಸರು ಒಂದು ಹೊಲಿಗೆ ಕೆಲಸವನ್ನು 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸಿದಾಗ 3 ಹೆಂಗಸರು ಮತ್ತು 6 ಗಂಡಸರು ಅದನ್ನು 3 ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುವರು. ಹಾಗಾದರೆ ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ಅಥವಾ ಒಬ್ಬ ಹೆಂಗಸು ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಕಾಲವು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ?

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

**[ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಉದ್ದೇಶಿಸಿದವು ಅಲ್ಲ]**

1. ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :

(i) $\dfrac{2x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$ $\qquad$ (ii) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y-1}{3} = 8$

$\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 4$ $\qquad$ $\dfrac{x-1}{3} + \dfrac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{3} = 5$ $\qquad$ (iv) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{9} = 6$ $\qquad$ $\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\dfrac{ax}{b} - \dfrac{by}{a} = a + b$ $\qquad$ (vi) $2^x + 3^y = 17$

$ax - by = 2ab$ $\qquad$ $2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಗೆ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ ಆಹಾರವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಣಿಗೆ ಉಳಿದವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಹ 20 ಗ್ರಾಂ ಪ್ರೋಟೀನುಗಳು, 6 ಗ್ರಾಂ ಕೊಬ್ಬು ಕೊಡಬೇಕು. ಆ ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆ ಪರಿಶೀಲಕರು A ,B ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಧಗಳ ಆಹಾರ ಮಿಶ್ರಣಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಮಿಶ್ರಣ A ನಲ್ಲಿ 10% ಪ್ರೋಟೀನುಗಳು ಮತ್ತು 6% ಕೊಬ್ಬುಗಳಿವೆ. ಮಿಶ್ರಣ B ನಲ್ಲಿ 20% ಪ್ರೋಟೀನುಗಳು, 2% ಕೊಬ್ಬು ಇದೆ. ಆದರೆ ಅವರು ಪ್ರತಿ ಮಿಶ್ರಣಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಗ್ರಾಮುಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :** ★ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಘಟನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅನುಸಂಧಾನಗೊಳಿಸುವ ಘಟನೆಗಳೊಂದಿಗೆ-ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ ಅದರ ಸಾಧನೆ ಗಳನ್ನು (ರೇಖೀಯ-ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳು, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ಕೊಂಡು ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

ಇದರಲ್ಲಿ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

2. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳಿವೆ.
3. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವು ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
   i. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇದಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಏಕೈಕ ಮೂಲ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಂಗತ (ಏಕರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ) ಸಮೀಕರಣಗಳು.
   ii. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು.
   iii. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದರೆ, ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಯಾವುದೇ ಮೂಲಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ - ಆಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಅಸಂಗತ (ಏಕರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದದ) ಸಮೀಕರಣಗಳು.
4. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.
   i. ಮೋಡಲ್ ವಿಧಾನ
   ii. ರೇಖಾಚಿತ್ರ (ಗ್ರಾಫ್) ವಿಧಾನ
   iii. ಬೈಜಿಕ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ವಿಧಾನಗಳು - ಆದೇಶ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ.
5. ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಸಹ ಗುಣಕಗಳಿಗೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ ಇರುತ್ತದೆ.
   i. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ಆದರೆ ಆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು
   ii. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ ಆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಅಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣ.
   iii. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ ಆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆ ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು
6. ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಗುರ್ತುಗಳಿಂದ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿ ಬರೆದಾಗ ಅವು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಆದೇಶ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.

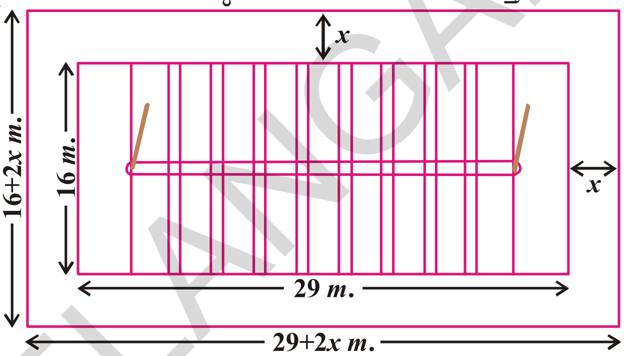
# ಅಧ್ಯಾಯ 5

# ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು

## (Quadratic Equations)

## 5.1 ಪರಿಚಯ

ಕಸ್ಬಾ ಪುರಸಭೆ ಪಾಠಶಾಲೆ ಕ್ರೀಡೆಗಳ ಕಮಿಟಿ ಪಾಠಶಾಲೆ ಆವರಣದಲ್ಲಿ 29 ಮೀ. × 16 ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಖೋ-ಖೋ ಕೋರ್ಟ್‌ನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಅವರಿಗೆ 558 ಚ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ಥಳ ಲಭ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಖೋ- ಖೋ ಕೋರ್ಟ್ ಸುತ್ತಲೂ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೋಸ್ಕರ ಸ್ವಲ್ಪ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಸಹ ಬಿಡಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಬಿಡುವ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲ ಕೋರ್ಟು ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಬಿಟ್ಟರೆ ಅದರ ಅಗಲ ಎಷ್ಟು ಇರಬೇಕು.




ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲ $x$ ಮೀ. ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಆಯತ ಆಕಾರ ಸ್ಥಳದ ಉದ್ದ = $(29 + 2x)$ ಮೀ.

ಮತ್ತು ಅಗಲ = $(16 + 2x)$ ಮೀ

ಆಯತಾಕಾರ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ = $(29 + 2x)(16 + 2x)$

ಆದರೆ ಈ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 558 ಚ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad (29 + 2x)(16 + 2x) = 558$

$\therefore \quad 4x^2 + 90x + 464 = 558$

$4x^2 + 90x - 94 = 0$ (ಎರಡು ಕಡೆ 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ )

$2x^2 + 45x - 47 = 0$

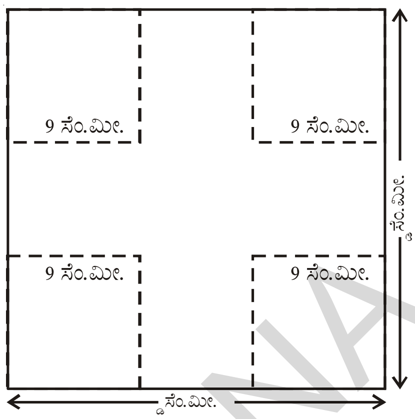
$2x^2 + 45x - 47 = 0$ ..... (1)

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ $ax + b = c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ '$x$' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೋಸ್ಕರ ಕಾಯ್ದಿಟ್ಟ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ನೀವು ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಬರುವ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ರಾಣಿ ಹತ್ತಿರ ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಲೋಹದ ತಗಡು ಇದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಇದರ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದ 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹು ಇರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಉಳಿದ ಭಾಗದಿಂದ ಒಂದು ಮುಚ್ಚಳ ಇಲ್ಲದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ತಯಾರು ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ. ಹೀಗೆ ತಯಾರಾದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನ ಫಲ 144 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಲೋಹದ ತಗಡಿನ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲವೇ ?




ಚೌಕಾಕಾರದ ಲೋಹದ ತಗಡಿನ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ '$x$' ಸೆಂ.ಮೀ.. ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ತಯಾರು ಮಾಡಿದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಳತೆಗಳು

9 ಸೆಂ.ಮೀ. $\times$ ($x$-18) ಸೆಂ.ಮೀ. $\times$ ($x$-18) ಸೆಂ.ಮೀ.

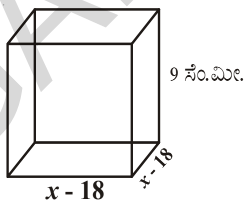
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲ 144 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ $9\,(x-18)\,(x-18) = 144$

$(x-18)^2 = 16$

$x^2 - 36x + 308 = 0$

ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ '$x$' ಬೆಲೆ ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಲೋಹದ ತಗಡಿನ ಬಾಹು ಆಗುತ್ತದೆ.




$x^2 - 36x + 308 = 0$ ..... (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಗಳಲ್ಲಿನ LHS ಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ ?

ಅವು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೇ ?

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಇಂತಹ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಾವು ಹೀಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ LHS ಗಳು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿವಿಧ ಪದ್ದತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

## 5.2 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Quadratic Equations)

**$a, b, c$ ಗಳೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ, $a \neq 0$ ಆಗಿರುವ $ax^2 + bx + c = 0$ ನ್ನು x ನಲ್ಲಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.** ಉದಾಹರಣೆಗೆ $2x^2 + x - 300 = 0$ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ ಮತ್ತು $1 - x^2 + 300 = 0$ ಗಳು ಸಹ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $p(x)$ ಒಂದು ಎರಡನೇ ಘಾತ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗುತ್ತಾ $p(x) = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವವುಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ $p(x)$ ನಲ್ಲಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಗರಿಷ್ಟಘಾತಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅದನ್ನುವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ನ್ನು **ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ ಎನ್ನುವರು ಮತ್ತು $y = ax^2 + bx + c$ ಯನ್ನು ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುವರು.**

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

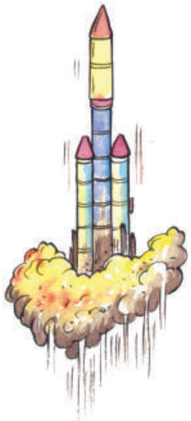
ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳೋ, ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

(v) $(2x + 1)\,(3x + 1) = b(x - 1)\,(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ / ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳು ಬಹಳ ಇವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು :

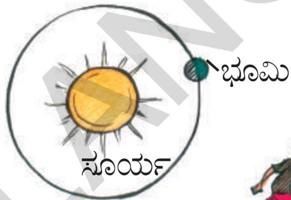


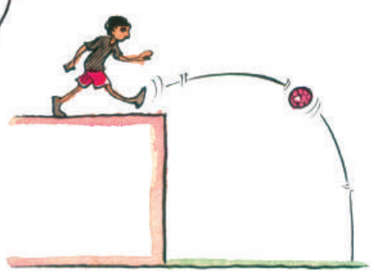
1. ಪ್ರಯೋಗಿಸಲಾದ ರಾಕೆಟ್‌ನ ಮಾರ್ಗ, ಎತ್ತರ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ/ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
2. ಉಪಗ್ರಹಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತ (ಸಿಗ್ನಲ್) ಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಡಿಷ್ ಪುಟ್ಟಿಯ ಆಕಾರಗಳು, ಟೆಲಿಸ್ಕೋಪ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಪ್ರತಿಫಲನ ಕನ್ನಡಿಯ ಆಕಾರಗಳು, ಕನ್ನಡಕದಲ್ಲಿರುವ ಮಸೂರದ ಆಕಾರಗಳು, ಖಗೋಳ ವಸ್ತುಗಳ ಕಕ್ಷೆಯ ಮಾರ್ಗಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಡಿಷ್‌ಪುಟ್ಟಿ

ಪ್ರತಿಫಲನ ಕನ್ನಡಿ

ಕನ್ನಡಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಮಸೂರಗಳು

3. ಒಂದು ಉತ್‌ಕ್ಷೇಪಕದ (Projectile) ಮಾರ್ಗ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.
4. ಒಂದು ವಾಹನಕ್ಕೆ ಬ್ರೇಕ್‌ಗಳು ಹಾಕಿದಾಗ ಅದು ನಿಲ್ಲುವ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಉಪಯೋಗವಾಗುವುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ/ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

i. ರಾಜು ಮತ್ತು ರಾಜೇಂದರ್ ಇಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 45 ಗೋಲಿಗಳು ಇವೆ. ಆದರೆ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರು 5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಇಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧ 124 ಆದರೆ ಇಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಮೊದಲು ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಸಮೀಕರಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ/ ಬರೆಯಿರಿ.

ii. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 5ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** i. ರಾಜು ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x$ ಆಗಿರಲಿ.

ರಾಜೇಂದರ್ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 45 - x$ (ಏಕೆ ?).

5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡ ನಂತರ ರಾಜು ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $x - 5$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ರಾಜೇಂದರ್ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $(45 - x) - 5$

$= 40 - x$

ಉಳಿದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $(x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= - x^2 + 45x - 200$

ಅಂದರೆ, $- x^2 + 45x - 200 = 124$ (ದತ್ತ ಗುಣಲಬ್ಧ = 124)

$\Rightarrow \quad - x^2 + 45x - 324 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 45x + 324 = 0$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ '–' ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ )

ಅಂದರೆ $x^2 - 45x + 324 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ '$x$' ಬೆಲೆಯೇ ರಾಜು ಹತ್ತಿರ ಮೊದಲು ಇದ್ದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $x^2 - 45x + 324 = 0$ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ ಆಗುತ್ತದೆ.

ii) ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ $x$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ

ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ = $(x + 5)$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ = 25 ಸೆಂ.ಮೀ.

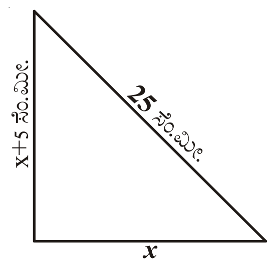
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ (ಬಾಹು)$^2$ + (ಬಾಹು)$^2$ = (ಬಾಹು)$^2$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

$2x^2 + 10x - 600 = 0$

$x^2 + 5x - 300 = 0$




ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯುವ $x$ ಬೆಲೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -2.** ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಯಾವುವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

**ಪರಿಹಾರ :** i. LHS = $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

ಅಂದರೆ, $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$. ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ

ii. ಇಲ್ಲಿ LHS $= x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$

ಮತ್ತು RHS $= (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$

i.e., $x + 12 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಅಲ್ಲ.

iii. ಇಲ್ಲಿ, LHS $= x\,(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

ಅಂದರೆ, $x\,(2x + 3) = x^2 + 1$ ನ್ನು

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $x^2 + 3x - 1 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ.

iv. ಇಲ್ಲಿ, LHS $= (x + 2)^3$

$$\begin{aligned} &= (x + 2)^2\,(x + 2) \\ &= (x^2 + 4x + 4)\,(x + 2) \\ &= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ನ್ನು

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

i.e., $6x^2 + 12x + 12 = 0$ ಅಥವಾ $x^2 + 2x + 2 = 0$

ಇದು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ.

**ಸೂಚನೆ :** ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಹಾಗೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಅಲ್ಲ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉದಾಹರಣೆ (iv) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ಘನ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವೇ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಹೌದೋ ಅಲ್ಲವೋ ನಿರ್ಣಯಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು ಎಂದು ನಾವು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.1

**1.** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ನಿರ್ಣಯಿಸಿರಿ.

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

**2.** ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

i. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 528 ಚ.ಮೀ. ಅದರ ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಎರಡು ಪಟ್ಟುಗಿಂತ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು, ಆದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಅವಶ್ಯಕವಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

ii. ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ 306 . ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ/ ಬರೆಯಿರಿ.

iii. ರೋಹನ್ ತಾಯಿ, ರೋಹನ್‌ಗಿಂತ 26 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳು. 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ದ 360 . ಆದರೆ ರೋಹನ್‌ನ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

iv. 480 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರವನ್ನು ಒಂದು ರೈಲು ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಇದೇ ರೈಲು ಮೊದಲಿನ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ 8 ಕಿ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಗಮ್ಯವನ್ನು ಸೇರುವುದಕ್ಕೆ ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ 3 ಗಂಟೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ರೈಲಿನ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 5.3 ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವುದು.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುವ, ಎದುರಾಗುವ ಕೆಲವು ಸಂಘಟನೆಗಳನ್ನು / ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ಪರವಾಗಿ ತಿಳಿಯದ ಚರಾಕ್ಷರ '$x$' ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯಪಡಿಸಬಹುದೋ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ '$x$'ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $2x^2 - 3x + 1 = 0$. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ $x$ ಬದಲು 1 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ RHS $x = 1$ ಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣ ಸಂತೃಪ್ತಿ ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1$ ನ್ನು $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ಗೆ **ಮೂಲ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಮಯದಲ್ಲಿ $x = 1$ ಎನ್ನುವುದು $2x^2 - 3x + 1$ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಸಹ ಆಗುವುದೆಂದು ಗುರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ಗೆ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ಆದರೆ '$\alpha$' ವನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು $\mathbf{x} = \alpha$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಬಿಡಿಸುವುದು ಎಂದು ಸಹ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಥವಾ '$\alpha$' ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತದೆಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಎಂದು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆ -3.** ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೊದಲು ಮಧ್ಯ ಪದವನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸು.

$p + q = b - 5$ ಮತ್ತು $p \times q = a \times c = 2 \times 3 = 6$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ

$p$ , $q$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ 6 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸೋಣ. ಅವು $(1, 6), (-1, -6); (2, 3); (-2, -3)$ ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $(-2, -3)$ ಎನ್ನುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $p + q = -5$ ಮತ್ತು $p \times q = 6$ ಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವುದೆಂದು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಧ್ಯಪದ '$-5x$' ನ್ನು '$-2x - 3x$' ಆಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

ಅಂದರೆ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ನ್ನು $(2x - 3)(x - 1) = 0$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $2x - 3 = 0$ ಅಥವಾ $x - 1 = 0$.

ಈಗ, $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು $x - 1 = 0$, ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. $x = 1$.

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $x = 1$ ಗಳು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳು.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, 1 ಮತ್ತು $\frac{3}{2}$ ಗಳು $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ.**

(i) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(iii) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (iv) $x^2 - 5x - 6 = 0$

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

1 ಮತ್ತು $\frac{3}{2}$ ಗಳು $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ನ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $2x^2 - 5x + 3$ ನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದು ಪ್ರತಿ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮಾನ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ - 4 :** $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

ಅಂದರೆ $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುವ $x$ ಬೆಲೆಗಳೇ $6x^2 - x - 2 = 0$ ದ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $3x - 2 = 0$ ಅಥವಾ $2x + 1 = 0$,

$\Rightarrow\ x = \frac{2}{3}$ ಅಥವಾ $x = -\frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $6x^2 - x - 2 = 0$ ದ ಮೂಲಗಳು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $-\frac{1}{2}$.

$6x^2 - x - 2 = 0$ ನಲ್ಲಿ $x = \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $x = -\frac{1}{2}$ ಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಅವು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂಲಗಳು ಆಗುತ್ತವೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಸರಿನೋಡಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** ಶೀರ್ಷಿಕೆ 5.1ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೋಸ್ಕರ ನಿಗದಿಪಡಿಸಿದ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 5.1 ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೋಸ್ಕರ ನಿಗದಿಪಡಿಸಿದ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲ $x$ಮೀ. ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಅದು $2x^2 + 45x - 47 = 0$ ನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ ಒಂದು ಬೆಲೆ. ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ –

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x\,(x - 1) + 47\,(x - 1) = 0$$

i.e., $(x - 1)\ (2x + 47) = 0$

ಅಂದರೆ $x = 1$ ಅಥವಾ $x = \frac{-47}{2}$ ಗಳು $2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$ ದ ಮೂಲಗಳು. ಆದರೆ '$x$' ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರೇಕ್ಷಕರಿಗೋಸ್ಕರ ಬಿಟ್ಟ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರ ಬೆಲೆ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲಾರದು.

$\therefore$ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲ $x = 1$ಮೀ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.2

1. ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii. $2x^2 + x - 6 = 0$ iii. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

iv. $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ v. $100x^2 - 20x + 1 = 0$ vi. $x(x + 4) = 12$

vii. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ viii. $x - \frac{3}{x} = 2$ ix. $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

2. ಮೊತ್ತ 27, ಗುಣಲಬ್ದ 182 ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 613 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರ ಅದರ ಪಾದಕ್ಕಿಂತ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಗೃಹ ಕೈಗಾರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ದಿನ ಒಂದು ನಿಯಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ದಿನ ತಯಾರಾದ ಒಂದೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ) ಆ ದಿನ ತಯಾರಾದ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 3 ಹೆಚ್ಚು. ಆ ದಿನ ತಯಾರಾದ ಒಟ್ಟು ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 90. ಆದರೆ ಆ ದಿನ ತಯಾರಾದ ಒಟ್ಟು ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಒಂದೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 28 ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 40 ಚ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆಯತದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ಅದರ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೆಚ್ಚು. ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 48 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಪಾದ, ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಎರಡು ರೈಲುಗಳು ಒಂದು ಸ್ಟೇಷನ್‌ನಿಂದ ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಶ್ಚಿಮದ ಕಡೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಉತ್ತರದ ಕಡೆಗೆ ಹೊರಡುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೇ ರೈಲು, ಎರಡನೇ ರೈಲಿಗಿಂತ 5 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆ ಹೆಚ್ಚು ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಅವು ಹೊರಟ ಎರಡು ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು 50 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೊಂದು ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

9. 60 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹುಡುಗ, ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಹಣವನ್ನು, ಪ್ರತಿ ಹುಡುಗಿ, ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಹಣವನ್ನು ಸಹಾಯಧನವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಒಟ್ಟು ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಸಹಾಯಧನ ₹ 1600. ಆದರೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಹುಡುಗರು ಇರುವರು?

10. ಗಂಟೆಗೆ 3 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಿಂದ ಹರಿಯುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ನದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೋಟಾರ್ ಬೋಟ್ 24 ಕಿ.ಮೀ.ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ, ಪುನಃ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗಲು ಹಿಡಿದ ಕಾಲ 6 ಗಂಟೆಗಳಾದರೆ ಬೋಟು ಸ್ಥಿರ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 5.4 ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

ಇದಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ನಾವು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ದತಿ ಪ್ರಕಾರ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದೋ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ಪದ್ದತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದೇ ? $x^2 + 4x - 4 = 0$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ದತಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 + 4x - 4 = 0$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ದತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲು ನಾವು

$p + q = 4$ ,$p \times q = -4$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ 'p' , 'q' ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಆದರೆ ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 + 4x - 4 = 0$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ದತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲಾರೆವು.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ಬೇರೆ ಪದ್ದತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

**ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.**

ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಸುನೀತ ವಯಸ್ಸು, ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆಕೆ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಆಕೆ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸಿಗೆ ಎರಡು ಪಟ್ಟುಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು ಆದರೆ ಆಕೆಯ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?

ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಕೆ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು $x$ ವರ್ಷ ಆಗಿರಲಿ. ಆದರೆ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಆಕೆ ವಯಸ್ಸು $= (x - 2)$ ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆಕೆಯ ವಯಸ್ಸು $= (x + 4)$ ವರ್ಷಗಳು .

ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರಕಾರ $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore \quad x^2 - 9 = 0$

ಅಂದರೆ $x^2 - 9 = 0$ ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ $x$ ಬೆಲೆ ಸುನೀತ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2 = 9$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಕಡೆ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ $x = 3$ ಅಥವಾ $x = -3$ ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ವಯಸ್ಸು ಧನಾತ್ಮಕ ಆದ್ದರಿಂದ $x = 3$ ನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ ಸುನೀತ ವಯಸ್ಸು 3 ವರ್ಷಗಳು.

ಈಗ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$(x + 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9$

$\therefore x + 2 = 3$ ಅಥವಾ $x + 2 = -3.$

$\therefore \quad x = 1$ ಅಥವಾ $x = -5$

ಅಂದರೆ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ರ ಮೂಲಗಳು 1 ಮತ್ತು – 5.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $x$ ಹೊಂದಿದ ಪದಗಳು ಖಚಿತ ವರ್ಗಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಸುಲಭವಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಇದೇ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ $x^2 + 4x - 4 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದೇ ? ಇನ್ನೂ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದಲೂ ಸಹ ಬಿಡಿಸಲಾರೆವು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಖಚಿತ ವರ್ಗ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬಿಡಿಸೋಣ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವುದೇ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ಆಲೋಚನೆ / ಉಪಾಯ.

ಈ ಪದ್ದತಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$

$x^2 + 2 . x . 2 = 4$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ LHS $a^2 + 2ab$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದಕ್ಕೆ $b^2$ ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು $a^2 + 2ab + b^2$ ಆಗಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ $b^2 = 2^2 = 4$ ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ

$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$

$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ $x^2$ನ ಸಹಗುಣಕ '1' ಅಲ್ಲ. $x^2$ ಸಹಗುಣಕ 1 ಆಗಿ ಪಡೆಯಲು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(ಎರಡೂ ಕಡೆ $\left[\frac{5}{6}\right]^2$ ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ)

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

(ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ)

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

ಅಂದರೆ, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ ಅಥವಾ $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore \; x = 1$ ಅಥವಾ $x = \frac{4}{6}$

$\Rightarrow \; x = 1$ ಅಥವಾ $x = \frac{2}{3}$

ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $= 1$ ಮತ್ತು $\frac{2}{3}$.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್‌ನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

**ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್ :** ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

**ಹಂತ -1** : ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆ '$a$' ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

**ಹಂತ -2** : ಸ್ಥಿರ ಪದ $\frac{c}{a}$ ನ್ನು ಬಲಗಡೆ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿರಿ.

**ಹಂತ -3** : ಎಡಭಾಗ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ ನಿಂದ ಕೂಡಿರಿ.

**ಹಂತ -4** : ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ವರ್ಗವಾಗಿ ಬರೆದು, ಬಲ ಭಾಗವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿರಿ.

**ಹಂತ -5** : ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡುವ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣ : $5x^2 - 6x - 2 = 0$

ಮೇಲಿನ ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್ ಆಧಾರವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಹಂತ -1 : $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (ಎರಡು ಕಡೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

ಹಂತ -2 : $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

ಹಂತ -3 : $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ $\left[\frac{3}{5}\right]^2$ ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ)

ಹಂತ -4 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

ಹಂತ -5 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3+\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3-\sqrt{19}}{5}$$

**ಉದಾಹರಣೆ-7.** $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ನ್ನು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣ $4x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

ಆದರೆ $x$ ನ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ ಋಣಾತ್ಮಕ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. (ಏಕೆ?) ಅಂದರೆ $x$ ನ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇಲ್ಲ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ.**

ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅನೇಕ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಆದರ್ಶ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ರೂಪವಾದ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ ಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

**ಹಂತ -1** : $ax^2 + bx + c = 0$ (ಎರಡೂ ಕಡೆ ‘$a$’ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

**ಹಂತ -2** : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

**ಹಂತ -3** : $x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ [ಎರಡೂ ಕಡೆ $\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ ಕೂಡಿದಾಗ]

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \frac{b}{2a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

ಹಂತ 4 : $\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

ಹಂತ 5 : $b^2 - 4ac \geq 0$, ಎಂದುಕೊಂಡು, ಎರಡು ಕಡೆ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ , $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac \geq 0$ ಆದಾಗ $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

ಒಂದು ವೇಳೆ $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\mathbf{b^2 - 4ac \geq 0}$ ಆದಾಗ $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಮೂಲಗಳನ್ನಾದರೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** ಅಭ್ಯಾಸ 5.1 ರಲ್ಲಿನ 2(i) ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ಥಳದ ಅಗಲ $x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ಅದರ ಉದ್ದ $= (2x + 1)$ ಮೀ.

ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 528 ಚ.ಮೀ. ಆದ್ದರಿಂದ

$x(2x + 1) = 528,$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0.$

ಈ ಸಮೀಕರಣ $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a = 2, b = 1, c = -528$ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\therefore \quad x = \frac{64}{4} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{-66}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = 16 \text{ ಅಥವಾ } x = -\frac{33}{2}$$

ಅಗಲ ಋಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 16$ ನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದ್ದ $x = 16x$ ಮೀ ಮತ್ತು ಅಗಲ $= (2x + 1) = 33$ ಮೀ

ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಮೂಲಗಳು ಸರಿಯಾದುವೋ, ಅಲ್ಲವೋ ನೀವು ಪ್ರಮಾಣಿಸಿ ನೋಡಬಹುದು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಯಾವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೀರಿ? ಏಕೆ?

**ಉದಾಹರಣೆ-9.** ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಧನ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 290 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೊದಲ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $x$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ. ಎರಡನೇ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $x + 2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

ಅಂದರೆ $\quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

ಅಂದರೆ $\quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$

ಅಂದರೆ $\quad x^2 + 2x - 143 = 0$

ಇದು $x$ ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \text{ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$\therefore \; x = 11$ ಅಥವಾ $x = -13$

ಆದರೆ $x$ ಒಂದು ಧನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದ್ದರಿಂದ $x = 11$.

$\therefore (x + 2) = 11 + 2 = 13$.

$\therefore$ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಧನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ಮತ್ತು 13

ತಾಳೆ ನೋಡುವುದು : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕ್ ತಯಾರು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಅಗಲ, ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 3 ಮೀ. ಕಡಿಮೆ. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಇದರ ಅಗಲಕ್ಕೆ ಸಮವಾದ ಪಾದ ಮತ್ತು 12 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕಿಂತ 4 ಚ.ಮೀ. ಹೆಚ್ಚು, ಆದರೆ ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕಿನ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

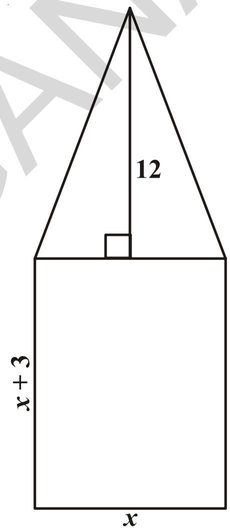
**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕಿನ ಅಗಲ $x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ಉದ್ದ $= (x + 3)$ ಮೀ.

ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= x(x + 3)$ ಚ.ಮೀ.$= (x^2 + 3x)$ ಚ.ಮೀ.

ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ $= x$ ಮೀ.

ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ ಚ.ಮೀ.




ಆದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$\therefore$ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \quad = 4 \text{ ಅಥವಾ} -1$$

ಆದರೆ $x \neq -1$ (ಏಕೆ ?) ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 4$.

ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕ್‌ನ ಅಗಲ = 4ಮೀ. ಮತ್ತು ಉದ್ದ $x + 3 = 4 + 3 = 7$ಮೀ.

ತಾಳೆ ನೋಡುವುದು : ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 28 ಚ.ಮೀ.

ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = (28 – 4) ಚ.ಮೀ.= 24 ಚ.ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ -11.** ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$

**ಪರಿಹಾರ :**

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$. ಇಲ್ಲಿ $a = 1, b = 4, c = 5$. ಆದ್ದರಿಂದ $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವಾದರೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇಲ್ಲ.

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. ಇಲ್ಲಿ $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$.

ಆದರೆ, $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ ಮೂಲಗಳು $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, \; x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, \; x \neq 0, 2$

**ಪರಿಹಾರ :** (i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ಒಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ

$x^2 + 1 = 3x$

$\Rightarrow$ $x^2 - 3x + 1 = 0,$

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1, b = -3, c = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (ಏಕೆ ?)

$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ಮತ್ತು $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ ಗಳು ಮೂಲಗಳು

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, \; x \neq 0, 2.$

$x \neq 0, 2,$ ಆದ್ದರಿಂದ $x(x-2)$ ರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0,$

ಇಲ್ಲಿ, $a = 3, b = -6, c = 2.$ ಆದ್ದರಿಂದ, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

ಮೂಲಗಳು $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ ಮತ್ತು $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$.

**ಉದಾಹರಣೆ-13.** ಒಂದು ಮೋಟಾರ್ ದೋಣಿಯ ವೇಗ ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಗಂಟೆಗೆ 18 ಕಿ.ಮೀ.ಗಳಾದರೆ, ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 24 ಕಿ.ಮೀ. ಪ್ರಯಾಣಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ, ಪುನಃ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹಿಂದುರಿಗಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲಕ್ಕಿಂತ 1 ಗಂಟೆ ಹೆಚ್ಚು. ಆದರೆ ನೀರಿನ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ನೀರಿನ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆ $x$ ಕಿ.ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮೋಟಾರ್ ದೋಣಿಯ ವೇಗ $= (18 - x)$ ಕಿ.ಮೀ.

ನೀರು ಹರಿಯುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮೋಟಾರ್ ದೋಣಿಯ ವೇಗ $= (18 + x)$ ಕಿ.ಮೀ.

ನೀರು ಹರಿಯುವ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಾಗ ಹಿಡಿಯುವಕಾಲ $= \dfrac{\text{ದೂರ}}{\text{ವೇಗ}} = \dfrac{24}{18-x}$ ಗಂಟೆಗಳು.

ನೀರು ಹರಿಯುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಾಗ ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ $= \dfrac{24}{18+x}$ ಗಂಟೆಗಳು..

ದತ್ತಾಂಶ ಪ್ರಕಾರ

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 48x - 324 = 0$$

ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ ಅಥವಾ } -54$$

ನೀರು ಹರಿಯುವ ವೇಗ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 6$

ಆದ್ದರಿಂದ ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ವೇಗ 6 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆಗೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳು ಇರುವವುಗಳನ್ನು ' ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i. $2x^2 + x - 4 = 0$     ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

   iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$     iv. $x^2 + 5 = -6x$

2. ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 1 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**3.** ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

(i) $x-\frac{1}{x}=3,\ x\neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30},\ x\neq -4, 7$

**4.** 3 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ರೆಹಮಾನ್ ವಯಸ್ಸಿನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು, 5 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆತನ ವಯಸ್ಸಿನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{1}{3}$ ಆದರೆ ಆತನ ಪ್ರಸ್ತುತ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?

**5.** ಮೌಳಿಕಾಗೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಆಂಗ್ಲದಲ್ಲಿ ಬಂದ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 30. ಆಕೆಗೆ ಒಂದು ವೇಳೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 2 ಅಂಕಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ, ಆಂಗ್ಲದಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಗಳು ಕಡಿಮೆ ಬಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧ 210 ಆಗಿರುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಆಕೆಗೆ ಎರಡು ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಬಂದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**6.** ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಸ್ಥಳದ ಕರ್ಣವು ಅದರ ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 60 ಮೀ. ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ಉದ್ದ, ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 30 ಮೀ. ಹೆಚ್ಚು, ಆದರೆ ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ಥಳದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**7.** ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 180 . ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 8 ರಷ್ಟು ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**8.** ಒಂದು ರೈಲು 360 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ವೇಗದಿಂದ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆ 5 ಕಿ.ಮೀ.ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಅದೇ ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ 1 ಗಂಟೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಆದರೆ ರೈಲಿನ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**9.** ಎರಡು ಕೊಳಾಯಿಗಳು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು $9\frac{3}{8}$ ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೊಳಾಯಿಯು, ಕಡಿಮೆ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೊಳಾಯಿಗಿಂತ 10 ಗಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ತುಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಕೊಳಾಯಿಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಅದೇ ಟ್ಯಾಂಕನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕಾಲದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸುತ್ತವೆ?

**10.** ಮೈಸೂರು, ಬೆಂಗಳೂರು ನಡುವೆ 132 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಒಂದು ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲು, ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲ್‌ಗಿಂತ 1 ಗಂಟೆ ಸಮಯ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ತಲುಪುತ್ತದೆ. (ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸುವ ಸಮಯಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ) ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವು 11 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆ ಆಗಿದ್ದು, ಇದು ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ ಹೊಂದಿದೆ. ಎರಡೂ ರೈಲುಗಳ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

**11.** ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ 468 ಚ.ಮೀ. ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 24 ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**12.** 29.4 ಮೀ. ಎತ್ತರ ಇರುವ ಒಂದು ಭವನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ 24.5 ಮೀ/ಸೆಕೆಂಡ್ ಆರಂಭದ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚೆಂಡನ್ನು ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ಭೂಮಟ್ಟದಿಂದ ಚೆಂಡಿನ ಎತ್ತರ $S = 29.4 + 24.5t - 4.9t^2$ ಆದರೆ ಆ ಚೆಂಡು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳು ನಂತರ ತಾಕುತ್ತದೆ?

**13.** 'n' ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಕರ್ಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}n(n-3)$ ಆದರೆ 65 ಕರ್ಣಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? 50 ಕರ್ಣಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುವುದೇ?

## 5.5 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$ax^2 + bx + c = 0$ ನ ಮೂಲಗಳು.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ ಇವುಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಭಾಗ **-1 :** $b^2 - 4ac > 0$ ಆದಾಗ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅವು

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳೆಂದರೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯ ಆಗುವ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂದು ಅರ್ಥ. ಮತ್ತು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇಧಿಸುವ ಬೆಲೆಗಳೆಂದು ಸಹ ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೆಂದರೆ ಆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆ ಎಳೆದರೆ ಅದು X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬೆಲೆಗಳೆಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

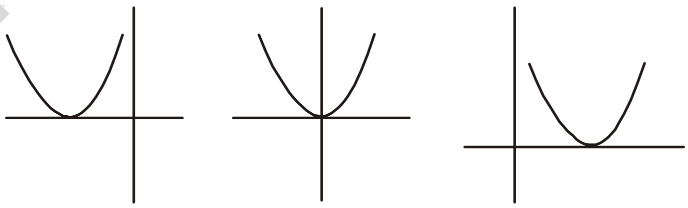
$b^2 - 4ac > 0$ ಆದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ವಕ್ರವು X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಕ್ರವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಭಾಗ **-2** : If $b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$

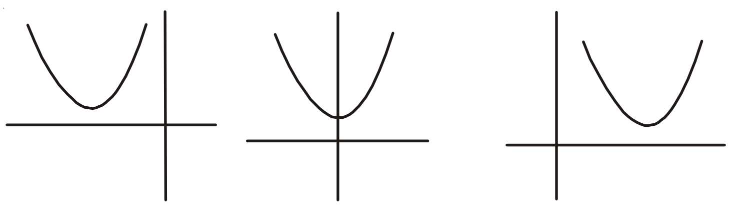
$$x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$$



ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ವಕ್ರವು X- ಅಕ್ಷವು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಭಾಗ **-3** : $b^2 - 4ac < 0$

ಆದಾಗ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಲ್ಲ. ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.



ಈ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ವಕ್ರವು X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ತಾಕುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$b^2 - 4ac$ ಎನ್ನುವುದು $ax^2 + bx + c = 0$ ಗೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಶೋಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ **ಶೋಧಕ (discriminant)** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು $\Delta$ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಅಂದರೆ $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ.

i. $b^2 - 4ac > 0$ ಆದಾಗ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ii. $b^2 - 4ac = 0$ ಆದಾಗ ಎರಡು ಸಮ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

iii. $b^2 - 4ac < 0$ ಆದಾಗ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳು ಸಂಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

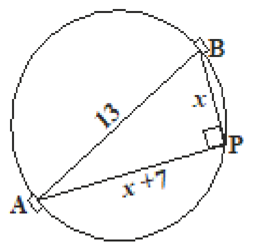
**ಉದಾಹರಣೆ-14.** $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ನ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಆ ನಂತರ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a = 2$, $b = -4$ ಮತ್ತು $c = 3$. ಆದ್ದರಿಂದ ಶೋಧಕ

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

**ಉದಾಹರಣೆ -15.** 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕ್ ಮೇರೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಪಾರ್ಕ್ ಮೇರೆಯ ಮೇಲೆ ಎದುರೆದುರಿಗೆ ಅಂದರೆ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಿದ A ಮತ್ತು B ಎನ್ನುವ ಎರಡು ಗೇಟ್‌ಗಳಿಂದ ಈ ಸ್ಥಂಭದವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 7 ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬಹುದೇ ? ಒಂದು ವೇಳೆ ಮಾಡಿದರೆ ಎರಡು ಗೇಟ್‌ಗಳಿಂದ ಈ ಸ್ಥಂಭ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ?




**ಪರಿಹಾರ :** ಮೊದಲು ಬೇಕಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.

ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡುವ ಬಿಂದುವು P ಆಗಿರಲಿ. B ಗೇಟಿನಿಂದ P ವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು $x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $BP = x$ ಮೀ. ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ = AP – BP ಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 7 ಮೀ. ಆದ್ದರಿಂದ $AP = (x + 7)$ ಮೀ. ಆಗುತ್ತದೆ.

AB = 13 ಮೀ. ಮತ್ತು AB ವ್ಯಾಸ ಆದ್ದರಿಂದ

$\angle APB = 90^0$ (ಏಕೆ?)

$AP^2 + PB^2 = AB^2$ (ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ)

$\Rightarrow \quad (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore \qquad 2x^2 + 14x - 120 = 0$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಪಡಿಸುವ '$x$' ಬೆಲೆಯೇ B ಗೇಟಿನಿಂದ P ವರೆಗೆ ಇರುವ ದೂರ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ $x^2 + 7x - 60 = 0$

ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇರುವುದೂ, ಇಲ್ಲದ್ದೂ ಇದರ ಶೋಧಕದ ಆಧಾರವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲು ಶೋಧಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಶೋಧಕ $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$

ಅಂದರೆ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ.

ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$x = 5$ ಅಥವಾ $x \; -12$.

ಆದರೆ $x$ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದು ಇದು ಖಚಿತವಾಗಿ ಧನಾತ್ಮಕ $x = 5$. ಆದರೆ B ಯಿಂದ 5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ 12 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬೇಕು.

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

1. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಅದರ ಶೋಧಕವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಲಾಭವೇನೋ ವಿವರಿಸಿರಿ? ಇದರ ಬೆಲೆ ಏಕೆ ಮುಖ್ಯವಾದುದು?
2. ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಎರಡು ಸಮಾನವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು, ಇನ್ನೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದ ವಿಧವಾಗಿ ಇರಬೇಕು.

**ಉದಾಹರಣೆ -16.** $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ದ ಶೋಧಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಆನಂತರ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ ? ಒಂದು ವೇಳೆ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ $a = 3$, $b = -2$ ಮತ್ತು $c = \frac{1}{3}$

ಶೋಧಕ $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಮ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಅವು $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}, \Rightarrow \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{3}.$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದರೆ $k$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. ಮಾವಿನ ಮರಗಳ ತೋಪು 800 ಚ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುತ್ತಾ, ಉದ್ದ ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇರುವ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬಲ್ಲವೇ ? ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಇಬ್ಬರು ಸ್ನೇಹಿತರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮೊತ್ತ 20 ವರ್ಷಗಳು. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 48. ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಸುತ್ತಳತೆ 80 ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 400 ಚ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರ ಪಾರ್ಕ್‌ನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬಲ್ಲವೇ ? ಮಾಡಬಹುದಾದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ, ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

[ಇದು ಪರೀಕ್ಷೆಗೋಸ್ಕರ ಉದ್ದೇಶಿಸಿದವು ಅಲ್ಲ]

1. ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳು ಗುರ್ತಿಲಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು 10 ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟರೆ ಒಟ್ಟು ಬಿಂದುಗಳೆಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ಎರಡಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 8 . ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 18 ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ. ಆದರೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 8 ಮೀ ಉದ್ದವಿರುವ ತಂತಿಯನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಹೀಗೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ 2ಚ.ಮೀ. ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಭಾಗದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಇರಬೇಕು?

   ಸೂಚನೆ $$\left[ x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2 \right]$$

4. ವಿನಯ್ ಮತ್ತು ಪ್ರವೀಣ್ ಸೇರಿ ಒಂದು ಮನೆಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕುವ ಕೆಲಸವನ್ನು 6 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಬಲ್ಲರು. ವಿನಯ್ ಒಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪ್ರವೀಣ್‌ಗಿಂತ 5 ದಿನಗಳು ಮೊದಲೇ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುವನು. ಆದರೆ ವಿನಯ್ ಒಬ್ಬನೇ ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಬಲ್ಲನು.

5. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ '$\frac{-b}{a}$' ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಲಬ್ದ 'c/a' ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದ, ಅಂಶದ ಎರಡು ಪಟ್ಟುಗಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ (reciprocal)ಗಳ ಮೊತ್ತ 216/21 ಆದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

**ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೇಖಾನಕ್ಷೆಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.**

★ "ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸಾಧನೆಗೆ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ 2 ಅಥವಾ 3 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆದು ರೇಖಾನಕ್ಷೆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಆಧಾರವಾಗಿ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

1. ಚರಾಕ್ಷರ $x$ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶರೂಪ $ax^2 + bx + c = 0$. ಇಲ್ಲಿ $a$, $b$, $c$ ಗಳು ವಾಸ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.

2. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ '$\alpha$' ಗೆ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ಆದರೆ '$\alpha$' ವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು, $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ.

3. $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಲಬ್ದವಾಗಿ ಬರೆದು ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ $ax^2 + bx + c = 0$ ದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುವುದು.

4. ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಹ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

5. $b^2 - 4ac \geq 0$ ಆದಾಗ $ax^2 + bx + c = 0$ ದ ಮೂಲಗಳು

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ.

   (i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದಾಗ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

   (ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದಾಗ ಎರಡು ಸಮ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದಾಗ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳು ಸಂಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಧ್ಯಾಯ
# 6 ಶ್ರೇಢಿಗಳು
## (Progressions)



### 6.1 ಪರಿಚಯ

ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಖಚಿತವಾದ ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿ ಹೂನಲ್ಲಿನ ಪುಷ್ಪ ದಳಗಳು, ಜೇನು ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿನ ರಂಧ್ರಗಳು, ಮೆಕ್ಕೆಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿನ ಕಾಳುಗಳು, ಅನಾನಸ್ ( pineapple ) ಮತ್ತು ದೇವದಾರು (pine ) ಹಣ್ಣುಗಳ ಮೇಲಿನ ಸುರಳೀ ಆಕಾರಗಳು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಸಹಜವಾದ ಇಂತಹ ವಿನ್ಯಾಸ ಪುನರಾವೃತ ಆಗುವುದೇ ಹೊರತು ಮುಂದುವರೆಯುವ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿ ಹೂವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಿಧವಾದ ಪುಷ್ಪದಳ ಒಂದೇ ದೂರದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತವೆ. ಜೇನಿನ ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿನ ಷಟ್‌ಭುಜಾಕಾರ ರಂಧ್ರಗಳೆಲ್ಲಾ ಷಡ್ಭುಜಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಅನಾನಸ್ ಹಣ್ಣುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಹಜವಾದ ಸುರಳೀ ಆಕಾರ ವಿನ್ಯಾಸ ಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ನಿಜ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ ಇಂತಹ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ (ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು)

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... ಬೆಲೆಗಳ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ

4, 6, 4, 6, 4, 6, ......

(ii) ಮೇರಿ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಉದ್ಯೋಗಗಳ ಅರ್ಹತೆ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಸಂಸಿದ್ದಳಾಗುತ್ತಾಳೆ. ಅದರ ಭಾಗವಾಗಿ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತಾ ಇದ್ದಾಳೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಇದೆ.

1, 2, 4, 8, 10, 20, 22 .......

(iii) ಉಷ ಒಂದು ಉದ್ಯೋಗಕ್ಕೆ ದರಖಾಸ್ತು ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ. ಆಕೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 8000 /- ಪ್ರಕಾರ ಮತ್ತು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ₹ 500/- ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುವ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ನೇಮಕಗೊಂಡಿದ್ದಾಳೆ, ಆದರೆ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ......... ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ 8000, 8500, 9000 ..... .

(iv) ಒಂದು ಏಣಿಯ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ಉದ್ದವು ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಇದೆ. ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಮೆಟ್ಟಿಲಿನ ಉದ್ದ 45 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ..... ಎಂಟನೇ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಕ್ರಮವಾಗಿ 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31.

ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸದಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ನಡುವೆ ನೀವು ಏನಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ?

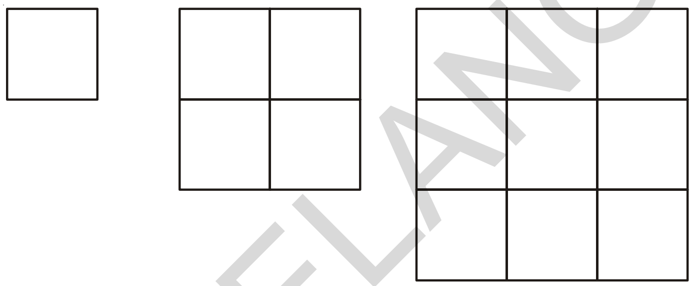
ಉದಾಹರಣೆ (i) ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4 ಮತ್ತು 6 ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವೃತವಾಗುತ್ತಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (ii). ರಲ್ಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.ಉದಾಹರಣೆ (iii) ,(iv) ರಲ್ಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತಾ ಇವೆ. ಪಟ್ಟಿ 8000, 8500, 9000, .... ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 500 ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತಿವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 45, 43, 41, ..... ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ '-2'ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಮುಂದುವರೆಯುವ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

(a) ಒಂದು ಉಳಿತಾಯ ಸ್ಕೀಮಿನಲ್ಲಿ ಅಸಲು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಲ $\frac{5}{4}$ ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಕೀಮಿನಲಿ ₹ 8000 ನ್ನು ಬಂಡವಾಳವಾಗಿಟ್ಟರೆ 3, 6, 9 ಮತ್ತು 12 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಬರುವ ಒಟ್ಟು ಹಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ 10000, 12500, 15625, 19531.25.

(b) 1, 2, 3, .... ಯೂನಿಟ್ ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಯೂನಿಟ್ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ

$1^2, 2^2, 3^2, ....$

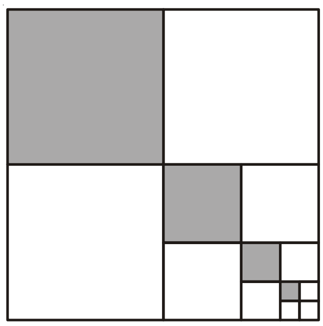


(c) ಹೇಮ ತನ್ನ ಮಗಳ ಮೊದಲನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಕ್ಕೆ ₹1000 ಗಳನ್ನು ತನ್ನ ಮಗಳ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿದಾಳೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಇಟ್ಟ ಹಣ ₹ 500 ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ.......... ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ

1000, 1500, 2000, 2500, .....

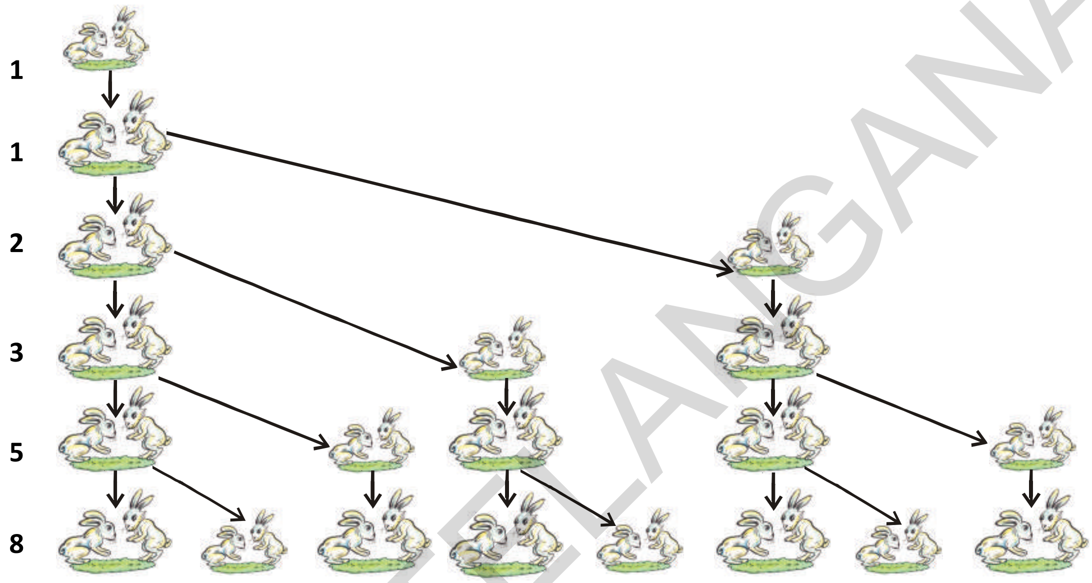
(d) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯೆ ಗೊಳಿಸಿದ ಚೌಕದ ಭಾಗಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಭಿನ್ನ ರಾಶಿರೂಪದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, ....$



(e) ಒಂದು ಮೊಲದ ಜೊತೆ ಎರಡನೇ ತಿಂಗಳಿನಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಮೊಲದ ಜೊತೆಯನ್ನು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಹೀಗೆ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಆದ ಮೊಲಗಳ ಜೊತೆ ಮತ್ತೆ ಎರಡನೇ ತಿಂಗಳಿನಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಮೊಲದ ಜೊತೆಯನ್ನು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.ಮೊದಲ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಜೊತೆ ಇದೆ ಅಂದುಕೊಂಡು ಯಾವ ಮೊಲಗಳ ಜೊತೆ ಸತ್ತು ಹೋಗಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ 1, 2, 3,4,5,6 ....., ನೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

1, 1, 2, 3, 5, 8




ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪದವನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ಕೆಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು **ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪದದಿಂದ** ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ನಂತರದ ಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವೆವು. ಇನ್ನೂ ಕೆಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪದ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಲಭಿಸುವ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ನಂತರ ಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ '$n$'ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಮತ್ತು '$n$' ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

**ಚರಿತ್ರೆ :** 400 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಬಾಬಿಲೋನಿಯನ್ನರಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕುರಿತು ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಆಧಾರಗಳಿವೆ. ಬೋಥೆನ್ಸ್ (570 AD) ಪ್ರಕಾರ ಈ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್ ಲೇಖಕರಿಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲ ಸಾರಿ ಪ್ರಮುಖ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟ್ಟ (470 AD) ಮೊದಲ ಸಾರಿ ಮೊದಲ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ, ಘನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ತನ್ನ ರಚನೆ ಆರ್ಯಭಟ್ಟೀಯ ಕ್ರಿ.ಶ. 499 ರಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ '$p$' ನೇ ಪದದಿಂದ '$n$'ನೇ ಪದದವರೆಗೂ ಇರುವ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಇವರು ನೀಡಿರುವುದು ನಡೆದಿದೆ. ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (ಕ್ರಿ.ಶ. 598 ), ಮಹಾವೀರ (ಕ್ರಿ.ಶ.850 ) ಮತ್ತು ಭಾಸ್ಕರ (ಕ್ರಿ.ಶ. 1114-1185 ) ರಂತಹ ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಮೊದಲ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿರವಂತೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

## 6.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) 1, 2, 3, 4, . . . (ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . . (iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಪದ ಎನ್ನುವರು.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಿರಾ? ಬರೆದರೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವಿರಿ? ಬಹುಶಃ ವಿನ್ಯಾಸದಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಬರೆಯುವರು. ಆ ನಿಯಮ ಏನೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

(i) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕಿಂತ 1 ಹೆಚ್ಚು.

(ii)ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕಿಂತ 30 ಕಡಿಮೆ.

(iii)ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 1ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ.

(iv)ರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳು 3. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಸೊನ್ನೆ (0) ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ.

(v)ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ – 0.5 ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ (ಅಂದರೆ 0.5 ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ) ಬರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಕೂಡುವುದರಿಂದಾಗಲಿ, ಕಳೆಯುವುದರಿಂದಾಗಲಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು **ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ** ಎನ್ನುವರು.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.**

(i) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು? ಏಕೆ?

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ...... (b) 2, 5, 7, 10, 12, 15, ......

(c) -1, -3, -5, -7, ......

(ii) ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

### 6.2.1 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದರೇನು? (Arthmetic Progression)

**ಮೇಲಿನ ಪರಿಶೀಲನೆಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ "ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ "ಎನ್ನುವರು.**

ಸೇರಿಸುವ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ಪದಾಂತರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಪದ $a_1$, ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು $a_2$, . . ., $n$ನೇ ಪದವನ್ನು $a_n$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ '$d$' . ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$.

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

(a) ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯ ಪ್ರಾರ್ಥನೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಿಂತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳು (ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ) 147 , 148, 149, . . ., 157.

(b) ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ ಜನವರಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ನಮೂದಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳ ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮವು

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) ₹ 1000 ಗಳ ಸಾಲಕ್ಕೆ 5% ಹಣವನ್ನು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಕಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಹಣ 950, 900, 850, 800, . . ., 50.

(d) ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ I ರಿಂದ XII ನೇ ತರಗತಿವರೆಗೂ ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಧಿಕ ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದವರಿಗೆ ಕೊಡುವ ಬಹುಮಾನಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 200, 250, 300, 350, . . ., 750 .

(e) 10 ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 50 ಗಳು ಪ್ರಕಾರ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣದ ಮೊತ್ತ ಕ್ರಮವಾಗಿ 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ AP ಆಗುವುದೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ? ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.
2. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಯಾವಾಗ ಧನಾತ್ಮಕವೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.
3. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು AP ಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.
4. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ?
5. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಬಂದ AP ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ :** ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$$

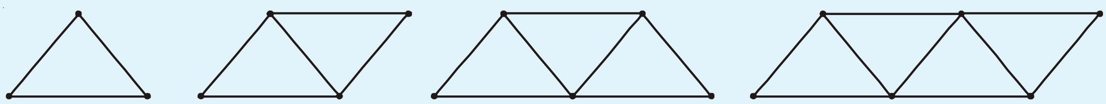
ಇದನ್ನೇ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದರಲ್ಲಿ '$a$' ಮೊದಲನೇ ಪದ '$d$' ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ಪದಾಂತರ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1, 2, 3, 4, 5, ....ನಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ ಒಂದು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಹ ಒಂದೇ.

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 2, 4, 6, 8, 10 ..... ಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ಪದ ಎಷ್ಟು? ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು?

### ಚಟುವಟಿಕೆ

(i) ಬೆಂಕಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಕಡ್ಡಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿರಿ.



(ii) ಪ್ರತಿ ಆಕಾರಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬೆಂಕಿ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ?

(iii) ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ (ಸ್ಥಿರವಾಗಿ) ಇದೆಯೇ?

(iv) ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದೇ?

## 6.2.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಧಾರ ಪಡುವ ಅಂಶಗಳು

6.2.1 ಶೀರ್ಷಿಕೆ (a) ಯಿಂದ (e) ವರೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಹ ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 6.2 ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಲ್ಲಿ (i) ರಿಂದ (v) ವರೆಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮಿತ. ಇಂತಹ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇದರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗೆ 3 ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಅಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ 3 ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿರಿ.

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ನಮಗೆ ಏನೇನು ಅವಶ್ಯಕ ! ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದೇ? ಅಥವಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದೇ?

ಆದರೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ಅಥವಾ ಅದನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡ ಬೇಕೆಂದರೆ ನಮಗೆ ಎರಡೂ ಅಂದರೆ ಅದರ ಮೊದಲ ಪದ $a$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$ ತಿಳಿದಿರಬೇಕೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೊದಲ ಪದ $a$ ಬೆಲೆ 6 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$ ಬೆಲೆ 3 ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ :

$$6, 9,12, 15, \ldots$$

ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಪದ $a = 6$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -3$ ಆದರೆ

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ : $6, 3, 0, -3, \ldots$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ

$a = -7$, $d = -2$, ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$, ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$, ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ $2, 2, 2, 2, \ldots$

ಅಂದರೆ $a$, $d$ ಬೆಲೆಗಳು ತಿಳಿದರೆ ನಾವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದೇ? ಇಲ್ಲವೇ? ಎಂದು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವೆವು? ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

$$6, 9, 12, 15, \ldots,$$

ಮೊದಲು ನಾವು ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$

$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$

ಅಂದರೆ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \ldots = 3$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇದೆ. ಅಂದರೆ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಾದರೂ ಅದರ ಬೆಲೆ ಮೂರೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ $a = 6$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 3$.

ಮತ್ತೊಂದು ಪಟ್ಟಿ: 6, 3, 0, – 3, . . .,ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3,$

$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$

$a4 - a_3 = -3 - 0 = -3$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$

ಅಂದರೆ ಇದು ಸಹ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯೇ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ $a = 6$, ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -3$

ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರವಾದರೆ, ಅದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆದರೆ

$$d = a_{k+1} - a_k$$

ಇಲ್ಲಿ $a_{k+1}$ , $a_k$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(k + 1)$ ಮತ್ತು $k$ ಪದಗಳು ಮತ್ತು $k \geq 1$ .

1, 1, 2, 3, 5, . . . . ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ (ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ) ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ.

**ಗಮನಿಸಿ :** ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ 6, 3, 0, – 3, . . ,ನಲ್ಲಿ $d$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು 3 ರಿಂದ 6 ನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ 6 ರಿಂದ 3ನ್ನು ಅಲ್ಲ. ಅಂದರೆ $(k + 1)$ ನೇ ಪದ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದರೂ ಇದರಿಂದ $k$ ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 'd' ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $a_2 - a_1, a_1 - a_2 \ldots.$ . ಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ.

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ.

1. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ?
2. ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿರಿ? ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
3. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದದಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ
4. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ? ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

5. ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಪಟ್ಟಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ?
6. ಕೊನೆಗೆ ನಿನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಏನು?

ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ : $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ ........, ಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ $a$ ಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಏಳನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, $a = \frac{1}{4}$; ಮತ್ತು $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ಗೊತ್ತು, ಆದ್ದರಿಂದ $d$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $a_2$-$a_1$ನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

ಏಳನೇ ಪದ $\frac{-5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-11}{4}$

**ಉದಾಹರಣೆ -2.** ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು? ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆದರೆ ನಂತರ ಬರುವ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . . (iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) $x, 2x, 3x, 4x$ ......

**ಪರಿಹಾರ :** (i) ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

ಅಂದರೆ $a_{k+1} - a_k$ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿ ಸಾರಿ ಸ್ಥಿರವು / ಸಮಾನ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದು. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 6$.

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಂತರ ಬರುವ ಎರಡು ಪದಗಳು : 22 + 6 = 28 ಮತ್ತು 28 + 6 = 34.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

ಅಂದರೆ $a_{k+1} - a_k$ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿಸಾರಿ ಸ್ಥಿರವು ಅಥವಾ ಸಮಾನ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -2$.

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಂತರ ಬರುವ ಎರಡು ಪದಗಳು

$-5 + (-2) = -7$ ಮತ್ತು $-7 + (-2) = -9$

(iii) ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಏರ್ಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ಇಲ್ಲಿ, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$.

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $a_{k+1} - a_k$ ಸಮಾನ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ನಂತರ ಬರುವ ಎರಡು ಪದಗಳು $4x + x = 5x$ ಮತ್ತು $5x + x = 6x$.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಘಟನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತದೆ? ಏಕೆ?

   (i) ಒಂದು ಟ್ಯಾಕ್ಸಿಗೆ ಮೊದಲನೆ ಕಿ.ಮೀ. ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ₹ 20 ಪ್ರಕಾರ ನಂತರ ಬರುವ ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಮೀ. ₹ 8 ಪ್ರಕಾರ ಕೊಡಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಮೀ.ಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣ.

   (ii) ಒಂದು ವಾಕ್ಯೂಮ್ ಪಂಪು ಸಿಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಗಾಳಿಯಿಂದ $\frac{1}{4}$ ನೇ ಭಾಗ ತೆಗೆದುಹಾಕಿರಿ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಸಾರಿ ಸಿಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ.

   (iii) ಒಂದು ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಲು ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 150 ಪ್ರಕಾರ ಅನಂತರ ಬರುವ ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 50 ಪ್ರಕಾರ ಕೊಡಬೇಕು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣ.

   (iv) ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿ ₹10000 ಗಳನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 8 % ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಪ್ರಕಾರ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣ.

2. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲನೆ ಪದ $a$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$ ಬೆಲೆಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $a = 10, d = 10$  (ii) $a = -2, d = 0$

   (iii) $a = 4, d = -3$  (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

   (v) $a = -1.25, d = -0.25$

**3.** ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$

(ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$

(iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

**4.** ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು? ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$ ಯನ್ನು ನಂತರ ಬರುವ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$

(ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$

(iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$

(vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$

(x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

## 6.3 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ $n$ ನೇ ಪದ.

ಉಷಾ ಒಂದು ಉದ್ಯೋಗಕ್ಕೆ ಅರ್ಜಿ ಹಾಕಿದಳು ಮತ್ತು ಉದ್ಯೋಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿದಳು. ಇವಳಿಗೆ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 8000 ಪ್ರಕಾರ ಮತ್ತು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ₹ 500 ಪ್ರಕಾರ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುವ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ನೇಮಿಸಿರುವುದು ನಡೆದಿದೆ. ಆದರೆ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ ನಂತರ 5 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು. ಮೊದಲು ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ ನಂತರ ಎರಡನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಅದು ₹ (8000 + 500) = ₹ 8500.

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ 3ನೇ , 4ನೇ, 5ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳವನ್ನು ಮೊದಲಿನ ವರ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಬಳಕ್ಕೆ ರೂ. ₹ 500 ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

3 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ = ₹(8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500] (**3**ನೇ ವರ್ಷ )

= ₹ 9000

4ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

$= ₹\ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(4 - 1)} \times 500]$ ( **4**ನೇ ವರ್ಷ )

$= ₹\ 9500$

5ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ $= ₹\ (9500 + 500)$

$= ₹\ (8000+500+500+500 + 500)$

$= ₹\ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(5 - 1)} \times 500]$ (**5**ನೇ ವರ್ಷ )

$= ₹\ 10000$

ಮೇಲಿನವುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಏರ್ಪಡುವುದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅದು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ.

ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸ ಆಧಾರವಾಗಿ 6ನೇ, 15ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲವೇ? ಆಕೆ ಒಂದುವೇಳೆ 25ನೇ ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಅದೇ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ 25ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವೇ? ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಆಕೆಯಸಂಬಳವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷದ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳಕ್ಕೆ ₹ 500 ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಹುದೇ? ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಮಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಅರ್ಥವಾಗಿದೆ ಆಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

15ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಸಂಬಳ = 14ನೇ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ + ₹ 500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + .. + 500}_{13\text{ ಬಾರಿ}}\right] + ₹\ 500$$

$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹\ [8000 + \mathbf{(15 - 1)} \times 500] = ₹\ 15000$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಸಂಬಳ + $(15 - 1) \times$ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚಳ

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 25ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಕೆಯ ಸಂಬಳ

$₹\ [8000 + \mathbf{(25 - 1)} \times 500] = ₹\ 20000$

= ಮೊದಲ ಸಂಬಳ + $\mathbf{(25 - 1)} \times$ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚಳ

ಈ ಉದಾಹರಣೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 15ನೇ ಪದವನ್ನು, 25ನೇ ಪದವನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಒಂದು ಸುಲಭ ಪದ್ದತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದೇ ಪದ್ದತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ $n$ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ $a_1 = a$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = $d$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore$ ಎರಡನೇ ಪದ $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2-1)}\, d$

ಮೂರನೇ ಪದ $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3-1)}\, d$

ನಾಲ್ಕನೇ ಪದ $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4-1)}\, d$

. . . . . . . .

. . . . . . . .

ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸದ ಆಧಾರವಾಗಿ $\boldsymbol{n}$ ನೇ ಪದ $a_n = a + (n-1)\, d$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಪದ $\boldsymbol{a}$**,** ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\boldsymbol{d}$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ $\boldsymbol{n}$ ನೇ ಪದ $a_n = a + (n-1)\, d.$

$\boldsymbol{a_n}$ ನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ ಎಂದು ಸಹ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಅಂಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $m$ ಪದಗಳಿರುವ $\boldsymbol{a_m}$ ನೇ ಪದವು ಕೊನೆ ಪದ ಆಗುತ್ತದೆ.ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಸಾರಿ $\boldsymbol{l}$ ನಿಂದ ಸಹ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

**ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿವುದು :** ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -3.** 5, 1, –3, –7 . . .ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ 10 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, $a = 5$, $d = 1 - 5 = -4$ ಮತ್ತು $n = 10$.

$a_n = a + (n-1)\, d$ ದಿಂದ

$a_{10} = 5 + (10-1)(-4) = 5 - 36 = -31$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 10ನೇ ಪದ – 31.

**ಉದಾಹರಣೆ -4.** 21, 18, 15, . . . ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ – 81 ಆಗುವುದು?

ಸೊನ್ನೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ ? ನಿನ್ನ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ ಮತ್ತು $a_n = -81$,

$$-81 = 21 + (n-1)(-3)$$
$$-81 = 24 - 3n$$
$$-105 = -3n$$
$$\therefore n = 35$$

ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 35ನೇ ಪದ – 81 ಆಗುವುದು.

ನಂತರ $a_n = 0$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ $n$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$\Rightarrow \quad 21 + (n-1)(-3) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad 3(n-1) = 21$$
$$\Rightarrow \quad n = 8$$

ಅಂದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 8 ನೇ ಪದ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** 3ನೇ ಪದ 5 ; 7ನೇ ಪದ 9 ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**

$$a_3 = a + (3 - 1)\,d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

ಮತ್ತು

$$a_7 = a + (7 - 1)\,d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

ಸಮೀಕರಣಗಳು (2) ರಿಂದ (1) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$a = 3, d = 1$$

ಬೇಕಾದ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ 3, 4, 5, 6, 7, . . .

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** 5, 11, 17, 23, . . . ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 301 ಇರುತ್ತದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ:

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6,\ a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6,\ a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

ಅಂದರೆ $k = 1, 2, 3,$ ಗಳಿಗೆ $(a_{k+1} - a_k)$ ಸ್ಥಿರವು

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದು.

ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $a = 5$ ಮತ್ತು $d = 6$.

ಈಗ 301 ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದೋ? ಇಲ್ಲವೋ? ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲು 301 ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $n$ನೇ ಪದವಾಗಿ ಇರುದೆಂದು ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ $a_n = 301$

ಆದರೆ

$a_n = a + (n - 1)\,d$ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, 301 ಕೊಟ್ಟ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕೆಂದರೆ, ನಮಗೆ

$$\therefore \quad 301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

ಅಥವಾ

$$301 = 6n - 1$$

$$\therefore \quad n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

ಆದರೆ $n$ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಬೇಕು (ಏಕೆ?).

ಆದ್ದರಿಂದ , 301 ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

**ಉದಾಹರಣೆ -7.** 3ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ:

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯೇ? ಹೌದು, ಇಲ್ಲಿ. $a = 12$, $d = 3$, $a_n = 99$.

$a_n = a + (n-1)\,d$, ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$99 = 12 + (n-1) \times 3$

i.e., $87 = (n-1) \times 3$

i.e., $n - 1 = \dfrac{87}{3} = 29$

i.e., $n = 29 + 1 = 30$

ಅಂದರೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 30 ಇರುವವು.

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** 10, 7, 4, . . ., – 62 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಿಂದ 11ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

$l = a + (n-1)\,d$

ಕೊನೆಯಿಂದ 11 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳು ಇರುವವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಆದರೆ

ಆದ್ದರಿಂದ, $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

$\Rightarrow$ $-72 = (n-1)(-3)$

$\Rightarrow$ $n - 1 = 24$

ಅಥವಾ $n = 25$

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 25 ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ ಕೊನೆಯಿಂದ 11 ನೇ ಪದ ಮೊದಲಿನಿಂದ 15ನೇ ಪದ ಆಗುತ್ತದೆ. ( 14ನೇ ಪದ ಅಲ್ಲ ಏಕೆ?)

$\therefore \quad a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

ಕೊನೆಯಿಂದ 11ನೇ ಪದ = – 32.

ಸೂಚನೆ **:** ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 11ನೇ ಪದ ; –62 ಮೊದಲನೇ ಪದವಾಗಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಆಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 11ನೇ ಪದ ಸಮಾನ.

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** ₹ 1000 ಗಳಿಗೆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ 8% ಸರಳಬಡ್ಡಿ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ? ಈ ಬಡ್ಡಿಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದೇ? ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆದರೆ 30 ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರ $I = \dfrac{P \times R \times T}{100}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

1ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿ $= ₹\ \dfrac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹\ 80$

2ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿ $= ₹\ \dfrac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\ 160$

3ನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿ = $\dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ = ₹ 240

ಈ ವಿಧವಾಗಿ 4ನೇ , 5ನೇ ......... ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ, . . . ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$80, 160, 240, \ldots$$

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 80 ಸ್ಥಿರವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $d = 80$ ಹಾಗೂ $a = 80$.

ಅಂದರೆ 30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ನಾವು $a_{30}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಈಗ, $a_{30} = a + (30 - 1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿ = ರೂ. ₹ 2400.

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** ಒಂದು ಹೂವಿನ ಮಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 23 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳು, ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 21, 3 ನೇಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 19 ........ ಇವೆ. ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ಗಿಡಗಳು ಇದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳು ಇವೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ, . . ., ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ (ಏಕೆ?).

ಹೂವಿನ ಗಿಡಗಳಲ್ಲಿನ ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ $n$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

$a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

$\therefore \quad a_n = a + (n - 1)\, d$

$5 = 23 + (n - 1)(-2)$

$\Rightarrow \quad -18 = (n - 1)(-2)$

$\Rightarrow \quad n = 10$

ಹೂವಿನ ಗಿಡಗಳ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

**1.** ಮೊದಲನೇ ಪದ $a$, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$, n ನೇ ಪದ $a_n$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಕೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

| ಕ್ರ.ಸಂ | $a$ | $d$ | $n$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| (i) | 7 | 3 | 8 | . . . |
| (ii) | – 18 | . . . | 10 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (iii) | . . . | – 3 | 18 | – 5 |
| (iv) | – 18.9 | 2.5 | . . . | 3.6 |
| (v) | 3.5 | 0 | 105 | . . . |

2. ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 10, 7, 4 ......ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 30 ನೇ ಪದ.
   (ii) $-3, \frac{-1}{2}, 2,$..... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 11ನೇ ಪದ.
3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $a_1 = 2;\ a_3 = 26$ ಆದರೆ $a_2$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $a_2 = 13;\ a_4 = 3$ ಆದರೆ $a_1, a_3$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?
   (iii) $a_1 = 5; a_4 = 9\frac{1}{2}$ ಆದರೆ $a_2, a_3$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iv) $a_1 = -4; a_6 = 6$ ಆದರೆ $a_2, a_3, a_4, a_5$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (v) $a_2 = 38;\ a_6 = -22$ ಆದರೆ $a_1, a_3, a_4, a_5$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 3, 8, 13, 18, . . . ,ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪದವು 78 ಆಗುತ್ತದೆ ?
5. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$
6. 11, 8, 5, 2 . . ., ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ‘ –150’ ಒಂದು ಪದವಾಗಿರುತ್ತದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ/ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 11 ನೇ ಪದ 38 ಮತ್ತು 16 ನೇ ಪದ 73 ಆದರೆ 31 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 3ನೇ, 9ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4, – 8 ಆದರೆ ಯಾವ ಪದವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗುತ್ತದೆ?
9. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 17ನೇ ಪದ 10ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 7 ಹೆಚ್ಚು, ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು?
10. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಮ. ಅವುಗಳ 100ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 100 ಆದರೆ ಅವುಗಳ 1000 ನೇ ಪದಗಳ ಮಧ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು?
11. 7ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಮೂರಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ?
12. 10 ಮತ್ತು 250 ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. 63, 65, 67, . . .. ಮತ್ತು 3, 10, 17, . . . ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ $n$ ನೇ ಪದಗಳು ಸಮಾನ ಆದರೆ $n$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
14. *3* ನೇ ಪದ 16 ಯಾಗಿ, 7ನೇ ಪದ, 5ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 12 ಹೆಚ್ಚು ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. 3, 8, 13, . . ., 253. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಕೊನೆಯಿಂದ 20ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
16. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 4ನೇ ಮತ್ತು 8ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 24 ಮತ್ತು 6ನೇ, 10ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 44 ಆದರೆ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
17. ಸುಬ್ಬಾರಾವು 1995 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 5000 ಸಂಬಳಕ್ಕೆ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಸಂಬಳ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ₹ 200 ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ಅವನ ಸಂಬಳ ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ₹ 7000 ಆಗುವುದು?

## 6.4 ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ *n* ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ.

ಶೀರ್ಷಿಕೆ 6.1 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಹೇಮ ವಿಷಯವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈಕೆ ತನ್ನ ಮಗಳ ಮೊದಲ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನದಂದು ₹ 1000 ಗಳು ಎರಡನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನ ದಂದು ₹ 1500, 3ನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನ ದಂದು ₹ 2000..... ಹಣವನ್ನು ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಡುತ್ತಾ ಹೋಗಿದ್ದಾಳೆ. ಆದರೆ ಆಕೆ ಮಗಳ 21 ನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನದ ನಂತರ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಹಣ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ?

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ, ಎರಡನೆ, ಮೂರನೆ ....ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟ ಹಣದ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1000, 1500, 2000, 2500, . . . ಹೀಗೆ 21ನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನದ ವರೆಗೂ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ. 21ನೇ ದಿನ ಅನಂತರ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿನ ಹಣದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಸಮಯ ವ್ಯರ್ಥ ಮಾಡುವುದೇ ಅಲ್ಲದೆ ಕಷ್ಟವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೀವು ಭಾವಿಸುತ್ತೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ! ಇದನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಲಾರೆವೇ?

### 6.4.1 'ಗಾಸ್' ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನ

ಗಾಸ್ 10 ವರ್ಷ ವಯಸ್ಸಿನವನಿದ್ದಾಗ ಬಿಡಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಈಗ ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇವನು 10 ವರ್ಷದ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿರುವಾಗ 1ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಎಂದು ಇವನನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸುವುದು ನಡೆದಿದೆ. ಇವರು ಅದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವಾಗಿ 5050 ಎಂದು ಹೇಳಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಉತ್ತರ ಹೇಳಿದ್ದಾನೆಯೋ ಊಹಿಸುವಿರೇ?

ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡರಿಕ್ ಗಾಸ್ (1777-1855) ಪ್ರಮುಖ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಜ್ಞ

ಅತನು ಅದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.

$$S = 1 + 2 + 3 + . . . + 99 + 100$$

ಮತ್ತೆ ಅದನ್ನು ಪುನಃ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆದಿದ್ದಾನೆ.

$$S = 100 + 99 + . . . + 3 + 2 + 1$$

ಆತನು ಈ ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ ಫಲಿತವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾನೆ.

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + . . . + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + . . . + 101 + 101 \text{ (100 ಸಾರಿ)}$$

(ಇದನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ)

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050, \quad \text{ಮೊತ್ತ} = 5050.$$

## 6.4.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ *n* ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ನಾವು ಸಹ $a, a + d, a + 2d, \ldots$ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಗಾಸ್ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯ $n$ನೇ ಪದ $a_n$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ $a + (n - 1)\, d$.

ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ '$n$' ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $S_n$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

$$\therefore\ S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)d)$$

$$S_n = (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d + \ldots + a$$

ಕೂಡಿದಾಗ $2S_n = (2a + (n - 1)d) + (2a + (n - 1)d) + \ldots + (2a + (n - 1)d)$ ($n$ ಬಾರಿ)

$$= n(2a + (n - 1)d)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}\ [\text{ಮೊದಲನೇ ಪದ} + \text{nನೇ ಪದ}] = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ, ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮಾತ್ರವೇ ತಿಳಿದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತಿಳಿಯದಿದ್ದಾಗ

$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $S_n$ ನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

**ಹೇಮ ಮಗಳಿನ ಹಣ**

ಮತ್ತೆ ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ

ಹೇಮ ಮಗಳಿನ 1ನೇ, 2ನೇ 3ನೇ 4ನೇ , . . ., ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಹಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ 1000, 1500, 2000, 2500, . . .,

ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ನಾವು ಹೇಮ ಮಗಳಿನ 21ನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನ ಅನಂತರ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ ಹಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1000$, $d = 500$ ಮತ್ತು $n = 21$.

ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$,

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 1000 + (21-1) \times 500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000 + 10000]$$

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

21ನೇ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನ ಅನಂತರ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಹಣ = ₹ 1, 26,000.

S ಬದಲಾಗಿ $S_n$ ಬಳಸೋಣ. ಇದರಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $S_{20}$ ಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ರಾಶಿಗಳಿವೆ. $S_n$, $a$, $d$ ,$n$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದರೆ ನಾಲ್ಕನೇ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

**ಸೂಚನೆ :** ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಮೊದಲ $(n-1)$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ $n$ನೇ ಪದ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $a_n = S_n - S_{n-1}$.

**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 16, 11, 6 .....; 23 ಪದಗಳು (ii) –0.5, –1.0, –1.5, .....; 10 ಪದಗಳು

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$....., 10 ಪದಗಳು

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ

**ಉದಾಹರಣೆ -11.** ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ 10 ಮತ್ತು ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 1050 ಆದರೆ 20 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, $S_n = 1050$; $n = 14$, $a = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a+13d] = 140+91d$$

$$910 = 91d$$

$$\therefore \quad d = 10$$

$$\therefore \quad a_{20} = 10 + (20 - 1)\, 10 = 200$$

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** 24, 21, 18, . . . ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 78 ಆಗುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $Sn = 78$ $n$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $$78 = \frac{n}{2}[48+(n-1(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

ಅಥವಾ $$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$\Rightarrow \quad n^2 - 17n + 52 = 0$

$\Rightarrow \quad (n-4)(n-13) = 0$

$\Rightarrow \quad n = 4$ ಅಥವಾ 13

$n$ ನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4 ಅಥವಾ 13.

**ಗಮನಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು :**

1. ಇಲ್ಲಿ 4 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = 13 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = 78.
2. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 5ನೇ ಪದದಿಂದ 13ನೇ ಪದದವರೆಗೆ ಇರುವ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆ (0) ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕ. ಇದರಿಂದ ಕೆಲವು ಪದಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಪದಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ಆಗುತ್ತಾ ಫಲಿತ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -13.** ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮೊದಲ 1000 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. (ii) ಮೊದಲ $n$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

**ಪರಿಹಾರ :**

(i) S = 1 + 2 + 3 + . . . + 1000 ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

ಮೊದಲ 1000 ಧನ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ = 500500.

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + . . . + n$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a = 1$ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ $l = n$.

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} \text{ (ಅಥವಾ ) } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲ $n$ ಧನ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

**ಉದಾಹರಣೆ -14.** $a_n = 3 + 2n$ ನ್ನು $n$ ಪದವಾಗಿ ಹೊಂದಿದ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 24 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಅಂದರೆ $a_n = 3 + 2n$,

ಆದ್ದರಿಂದ, $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

⋮

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ: 5, 7, 9, 11, . . .

ಇಲ್ಲಿ, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

ಅಂದರೆ ಈ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ಇದರ ಮೊದಲ ಪದ $a = 5$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 2$.

$S_{24}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $n = 24, a = 5, d = 2$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ

$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12(10 + 46) = 672$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 24 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = 672.

**ಉದಾಹರಣೆ -15.** ಒಂದು ಟೆಲಿವಿಜನ್ ತಯಾರಿಸುವ ಕಂಪನಿಯು 3 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 600 ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳನ್ನು, 7 ನೇ ವರ್ಷ 700 ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಇದು ತಯಾರಿಸುವ ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದ್ದರೆ

(i) 1ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದು ತಯಾರಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 10ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದು ತಯಾರಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

(iii) ಮೊದಲ 7 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ತಯಾರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** (i) ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ತಯಾರು ಮಾಡುವ ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಬೆಲೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದ್ದರೆ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ, . . ., ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

$n$ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸುವ ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $a_n$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

$a_3 = 600$ ಮತ್ತು $a_7 = 700$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅಥವಾ $a + 2d = 600$

ಮತ್ತು $a + 6d = 700$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ $d = 25$ ಮತ್ತು $a = 550$ ಬರುವುದು

ಮೊದಲ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 550.

(ii) ಈಗ $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

ಅಂದರೆ 10ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 775.

(iii) ಅದೇರೀತಿ , $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

ಮೊದಲ 7 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರಾದ ಒಟ್ಟು ಟೆಲಿವಿಜನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4375.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಳಿದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 2, 7, 12, . . ., 10 ಪದಗಳು. (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 ಪದಗಳು

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 ಪದಗಳು. (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$, 11 ಪದಗಳು

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

   (iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ

   (i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$, ಆದರೆ $n$ ಮತ್ತು $S_n$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (ii) $a = 7$, $a_{13} = 35$, ಆದರೆ $d$ ಮತ್ತು $S_{13}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$, ಆದರೆ $a$ ಮತ್ತು $S_{12}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$, ಆದರೆ $d$ ಮತ್ತು $a_{10}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (v) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$, ಆದರೆ $n$ ಮತ್ತು $a_n$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (vi) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$, ಆದರೆ $n$ ಮತ್ತು $a$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

   (vii) $l = 28$, $S = 144$, ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಆದರೆ $a$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

4. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 17 ಮತ್ತು 350 . ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 9 ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 2 ನೇ, 3 ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 14 ಮತ್ತು 18. ಆದರೆ 51 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ 7 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 49 ಮತ್ತು 17 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 289 ಆದರೆ ಮೊದಲ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $a_n$ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾದರೆ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ? ಮತ್ತು ಮೊದಲ 15 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

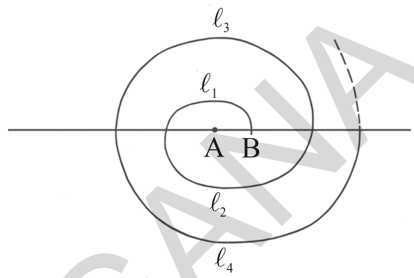
8. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $4n - n^2$ ಆದರೆ ಮೊದಲನೆ ಪದ ಎಷ್ಟು? ($S_1$ ಬೆಲೆಯೇ ಮೊದಲ ಪದ ಆಗುವುದೆಂದು ಗುರ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿರಿ) ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಎರಡನೇ ಪದ ಎಷ್ಟು? ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 3 ನೇ ಪದವನ್ನು, 10 ನೇ ಪದವನ್ನು ಮತ್ತು $n$ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. 6 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಮೊದಲ 40 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯುನ್ನತ ಪ್ರತಿಭೆ ತೋರಿಸಿದವರಿಗೆ ಒಟ್ಟು 700 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ 7 ಬಹುಮಾನಗಳು ಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿ ಬಹುಮಾನದ ಬೆಲೆ ಅದರ ಹಿಂದಿನದಕ್ಕೆ ₹ 20 ಕಡಿಮೆ ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಬಹುಮಾನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾವರಣ ಪರಿರಕ್ಷಣೆಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಿಡಗಳು ನೆಡಬೇಕೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅವರು ಓದುತ್ತಿರುವ ತರಗತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಗಿಡಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ I ನೇ ತರಗತಿ ಓದುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಸೆಕ್ಷನ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 1 ಗಿಡವನ್ನು, II ನೇ ತರಗತಿ ಓದುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಸೆಕ್ಷನ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 2 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡಬೇಕೆಂದು ಈ ವಿಧವಾಗಿ XII ನೇ ತರಗತಿವರೆಗೂ ಮಾಡಲು ನಿರ್ಣಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸೆಕ್ಷನ್‌ಗಳು ಇದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ನೆಟ್ಟ ಗಿಡಗಳು ಎಷ್ಟು?

12. ಒಂದು ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಕ್ರಮಾಂತರ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ A ಮತ್ತು Bನಲ್ಲಿದ್ದು, A ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಆರಂಭವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 0.5 ಸೆಂ.ಮೀ. , 1.0 ಸೆಂ.ಮೀ., 1.5 ಸೆಂ.ಮೀ., 2.0 ಸೆಂ.ಮೀ., . . . ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತಿವೆ. ಈ ರೀತಿ ಹದಿಮೂರು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸುರುಳಿಯ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಏನು? ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)




[ಸೂಚನೆ: ಅನುಕ್ರಮ ಅರೆ ವೃತ್ತದ ಉದ್ದಗಳು $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, A, B, . . ., .]

13. 200 ಮರದ ಕೊರಡುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 20 ಮರದ ಕೊರಡುಗಳನ್ನು , ಅದರ ಮೇಲೆ 19 ಮರದ ಕೊರಡುಗಳನ್ನು, ಅದರ ಮೇಲೆ 18 ಮರದ ಕೊರಡುಗಳನ್ನು.... ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು 200 ಮರದ ಕೊರಡುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ? ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮರದ ಕೊರಡುಗಳು ಇವೆ?

14. ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಬಕೆಟ್ ಆಟದಲ್ಲಿ, ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಕೆಟ್ ಅದಕ್ಕೆ 5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೆಂಡು ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು 10 ಚೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಚೆಂಡುಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು 3 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಟದಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮೊದಲು ಬಕೆಟ್ ಹತ್ತಿರದಿಂದ ಹೊರಟು ಮೊದಲ ಚೆಂಡಿನ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ. ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಬಂದು ಬಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಬೇಕು. ನಂತರ


ಮತ್ತೆ ಬಕೆಟ್‌ನಿಂದ ಹೊರಟು ಎರಡನೇ ಚೆಂಡಿನ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಾಕಬೇಕು. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಚೆಂಡನ್ನು ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಓಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ದೂರ ಎಷ್ಟು?

[ಸೂಚನೆ :ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬರುವುದಕ್ಕೆ ಆಟ ಆಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಓಡಬೇಕಾದ ದೂರ ಕ್ರಮವಾಗಿ $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

## 6.5 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಕೆಳಗಿನ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) 30, 90, 270, 810 ..... (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$.....

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಂತರ ಬರುವ ಪದವನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲೆವೇ?

(i) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ದತ್ತ ಪದವನ್ನು (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

(ii) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ದತ್ತ ಪದವನ್ನು (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು $\frac{1}{4}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

(iii) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ದತ್ತ ಪದವನ್ನು (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು 0.8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು (ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಅಥವಾ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುವರು.

ಆ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ 'r' ಎನ್ನುವರು. ಅಂದರೆ ಮೇಲೆ ಉದಾಹರಿಸಿದ (i), (ii), (iii) ಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, $\frac{1}{4}$, 0.8.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದ '$a$' ಯಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು '$r$' ಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲ ಪದ '$a$' ಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ '$r$'ನಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

$\therefore$ ಎರಡನೇ ಪದ $= ar$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಮೂರನೇ ಪದ $= ar \cdot r = ar^2$

$\therefore$ $a, ar, ar^2$ ..... ನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪದ, ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತ '$r$'

ಅಂದರೆ $\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = \ldots\ldots\ldots = r$

ಒಂದು ವೇಳೆ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು $a_1$ ನಿಂದ 2 ನೇ ಪದವನ್ನು $a_2$ ನಿಂದ ..... n ನೇ ಪದವನ್ನು $a_n$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ

ಆಗ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

$\therefore$ $a_1, a_2, a_3 \ldots. a_n \ldots$ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಪದ ಶೂನ್ಯೇತರವಾಗುತ್ತಾ

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ ಆಗಬೇಕು. ($r \neq 1$)

ಇಲ್ಲಿ $n$ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $n \geq 2$.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಅಲ್ಲವೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. 6, 12, 24, 48, .....
2. 1, 4, 9, 16, ......
3. 1, –1, 1, –1, .....
4. –4, –20, –100, –500, .....

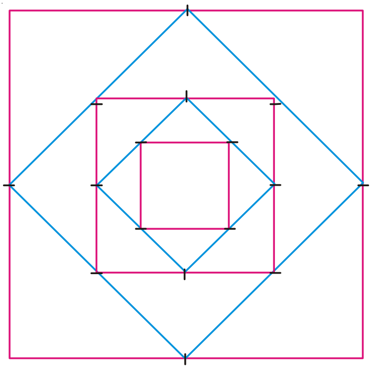
ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ತನ್ನ ನಾಲ್ಕು ಜನ ಮಿತ್ರರಿಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬರೆದು, ಅವರನ್ನು ಸಹ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಪುನಃ ನಾಲ್ಕು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಇದೇ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬರೆದು ಕಳುಹಿಸಿ ಎಂದು ಕೋರಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಸರಪಳಿ ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಮುಂದುವರೆದರೆ ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ ......ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿರುವ ಉತ್ತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ

1, 4, 16, 64 .............

(ii) ₹ 500/- ಗಳನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಶೇಕಡ 10% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಪ್ರಕಾರ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

550, 605, 665.5 ......



(iii) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಮೊದಲ ಚೌಕದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಎರಡನೇ ಚೌಕ, ಎರಡನೇ ಚೌಕದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ, ಮೂರನೇ ಚೌಕ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಸಿದೆ. ಮೊದಲ ಚೌಕದ ಬಾಹು 16ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ ..... ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ .

256, 128, 64, 32, .....

(iv) ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದ ಲೋಲಕ ಮೊದಲ ಡೋಲನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ವಕ್ರ/ಕಂಸದ ಉದ್ದವು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಂತರ ಪ್ರತಿ ಡೋಲನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಡೋಲನದಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕಂಸದ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ 0.9 ನೇ ಭಾಗ ಇರುವುದು. ಆದರೆ ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ...... ಡೋಲನಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕಂಸಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

18, 16.2, 14.58, 13.122......

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ.**

1. ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿ ಏಕೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದೋ ವಿವರಿಸಿರಿ?
2. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳಾವುವು?

ಈಗ ಮೊದಲ ಪದ '$a$' ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ '$r$' ತಿಳಿದಾಗ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬೇಕೋ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುವುದೋ, ಇಲ್ಲವೋ ಹೇಗೆ ನಿರ್ಣಯಿಸ್ತಾರೋ ನೋಡೋಣ?

**ಉದಾಹರಣೆ -16.** ಮೊದಲ ಪದ $a = 3$, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $r = 2$ ಆದರೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೊದಲ ಪದ '$a$' ಆದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ನಂತರ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವು. ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ 2 ನೇ ಪದವು ಬೇಕೆಂದರೆ ನಾವು ಮೊದಲ ಪದ $a = 3$ ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $r = 2$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

$\therefore$ 2 ನೇ ಪದ $= ar = 3 \times 2 = 6$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 3 ನೇ ಪದ = 2 ನೇ ಪದ $\times$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ

$= 6 \times 2 = 12$

ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ

$3, 6, 12, 24, \ldots\ldots$ .

**ಉದಾಹರಣೆ -17.** $a = 256$, $r = \dfrac{-1}{2}$ ಆದರೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $= a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), 256\left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$$= 256, -128, 64, -32 \ldots\ldots$$

**ಉದಾಹರಣೆ -18.** ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ $25, -5, 1, \dfrac{-1}{5}$ ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ ...ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $a_1, a_2, a_3 \ldots.$

ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots$

ಇಲ್ಲಿ $a_1 = 25$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $r = \dfrac{-5}{25} = \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-1}{5}$.

**ಉದಾಹರಣೆ -19.** ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತವೆ?

(i) $3, 6, 12, \ldots\ldots$ (ii) $64, -32, 16,$

(iii) $\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{8}, \ldots\ldots$

**ಪರಿಹಾರ :** (i)$a_1, a_2, a_3, .....a_n$ ..... ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಪದಗಳೆಲ್ಲವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಬಾರದು,

ಮತ್ತು $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ..... \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದ ಪದಗಳೇ, ಹಾಗೆಯೇ

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$ ಮತ್ತು

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ = 2.

(ii) ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳು ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದ ಪದಗಳೇ, ಮತ್ತು

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$

ಮತ್ತು $\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $\frac{-1}{2}$.

(iii) ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳು ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದ ಪದಗಳೇ, ಮತ್ತು

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$

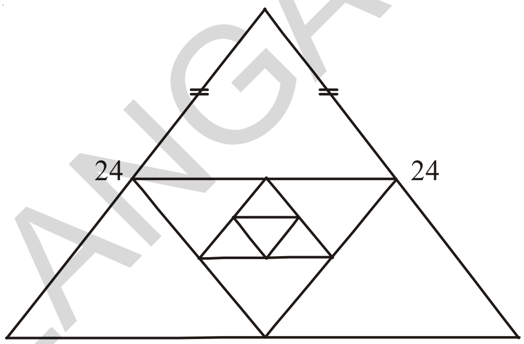
$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.4

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಘಟನೆಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ?
   (i) ಷರ್ಮಿಳನ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ 5,00,000/- ಆ ನಂತರ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳದಲ್ಲಿ 10% ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.
   (ii) 30 ಮೆಟ್ಟಿಲು ಇರುವ ಒಂದು ಮೆಟ್ಟಿಲು ಸೇತುವೆ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಮೆಟ್ಟಿಲು ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ 100 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಅವಶ್ಯಕ. ಆ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿ ಮೇಲಿನ ಮೆಟ್ಟಿಲು ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಮೆಟ್ಟಿಲು ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಗಿಂತ 2 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಕಡಿಮೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಮೆಟ್ಟಿಲು ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ.
   (iii) 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹು ಉದ್ದ ಇರುವ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವು ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಎರಡನೆ ತ್ರಿಭುಜ, ಹಾಗೆಯೇ ಎರಡನೇ ತ್ರಿಭುಜದ ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ 3ನೇ ತ್ರಿಭುಜ ಏರ್ಪಡುವುದು. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ... ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು




2. ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ '$a$' ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ '$r$' ಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿವೆ. ಆದರೆ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $a = 4; \quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5}\,; \quad r = \frac{1}{5}$

   (iii) $a = 81; \quad r = \frac{-1}{3}$ (iv) $a = \frac{1}{64}; \quad r = 2$

3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು? ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾದರೆ ನಂತರ ಬರುವ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) 4, 8, 16 ..... (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}.....$

   (iii) 5, 55, 555, .... (iv) $-2, -6, -18$ .....

   (v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}.....$ (vi) $3, -3^2, 3^3, .....$

   (vii) $x, 1, \frac{1}{x}, .....$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}.....$

   (ix) 0.4, 0.04, 0.004, .....

4. $x, x+2, x+6$ ಗಳು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳಾದರೆ '$x$' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 6.6 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ $n$ನೇ ಪದ.

ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ 3 ಪಟ್ಟು ಆಗುವ ಒಂದು ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ 30 ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳು ಇದ್ದರೆ, 4ನೇ ಗಂಟೆಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಮೊದಲ, ಎರಡನೇ ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿನ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಆಗುವುದು ಆದ್ದರಿಂದ

2 ನೇ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3 × ಮೊದಲ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿನ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$

$= 30 \times 3^{(2-1)}$

$= 90$

3 ನೇ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3 × 2 ನೇ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 3 \times 90 \quad = 30 \times (3\times3)$

$= 30 \times 3^2 \quad = 30 \times 3^{(3-1)}$

$= 270$

4 ನೇ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 3 × 3 ನೇ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 3 \times 270 \quad = 30 \times (3\times3\times3)$

$= 30 \times 3^3 \quad = 30 \times 3^{(4-1)}$

$= 810$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅದು

30, 90, 270, 810, ....

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (ಏಕೆ)

ಮೇಲಿನ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ 20ಗಂಟೆಗಳ ಸಮಯದಲ್ಲಿರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರೇ?

ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅಥವಾ ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸದ ಆಧಾರದಂತೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ನಾವು 20ಗಂಟೆಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

$$= 30\times\underbrace{(3\times3\times\ldots\times3)}_{19\text{ಬಾರಿ}}$$

$$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ 25 ನೇ ಪದವನ್ನು 35ನೇ ಪದವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$a_1, a_2, a_3$ .....ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $r$ ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

2 ನೇ ಪದ $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

3 ನೇ ಪದ $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

4 ನೇ ಪದ $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

..................................................

..................................................

ಮೇಲಿನ ವಿನ್ಯಾಸದಿಂದ nನೇ ಪದ $a_n = ar^{n-1}$ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ,ಮೊದಲನೆ ಪದ '$a$', ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ '$r$' ಯಾಗಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ '$n$'ನೇ ಪದ $a_n = ar^{n-1}$.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -20.** $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$....... ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 20ನೇ ಪದವನ್ನು ಮತ್ತು '$n$' ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ $a = \frac{5}{2}$ ಮತ್ತು $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

ಆಗ $a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{20}}$

ಮತ್ತು $a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$

**ಉದಾಹರಣೆ -21.** : ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ 2, $2\sqrt{2}$, 4 ..... ನ ಯಾವ ಪದವು 128 ಆಗುವುದು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ $a = 2$ $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

'$n$'ನೇ ಪದವು =128 ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

ಆಗ $a_n = ar^{n-1} = 128$

$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$

$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \quad n = 13.$$

ಅಂದರೆ 13ನೇ ಪದವು 128 ಆಗುವುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -22.** ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 3ನೇ ಪದ 24 ಮತ್ತು 6ನೇ ಪದ 192 ಆದರೆ 10ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ $a_3 = ar^2 = 24$ ...(1)

$a_6 = ar^5 = 195$ ...(2)

(2) ನ್ನು (1) ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{195}{24}$

$$\Rightarrow \quad r^3 = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow \quad r = 2$$

'$r$' ಬೆಲೆಯನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿದರೆ $a = 6$.

$\therefore \; a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072.$

## ಅಭ್ಯಾಸ -6.5

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿ ಗುಣಶ್ರೇಢಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ '$r$', $a_n$ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$......... (ii) $2, -6, 18, -54$

(iii) $-1, -3, -9, -27$ .... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}$.........

2. 5, 25, 125, .....ಎನ್ನುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 10ನೇ , '$n$'ನೇ ಪದಗಳನ್ನುಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $a_1 = 9;\ r = \frac{1}{3};$ ಆದರೆ $a_7$ (ii) $a_1 = -12;\ r = \frac{1}{3};$ ಆದರೆ $a_6$

4. (i) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ 2, 8, 32, ..... ಯ ಯಾವ ಪದವು 512 ಆಗುತ್ತದೆ ?

(ii) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ ...... ಯ ಯಾವ ಪದವು 729 ಆಗುತ್ತದೆ?

(iii) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$..... ಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದವು $\frac{1}{2187}$ ಆಗುತ್ತದೆ ?

5. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 8ನೇ ಪದ 192 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ 2 ಆದರೆ 12 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

6. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 4ನೇ ಪದವು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು 7 ನೇ ಪದವು $\frac{16}{81}$ ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?.

7. 162, 54, 18 ..... ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}$.... ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ '$n$'ನೇ ಪದಗಳು ಸಮಾನ ಆದರೆ '$n$' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

**[ಇದು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಉದ್ದೇಶಿಸಿಲ್ಲ]**

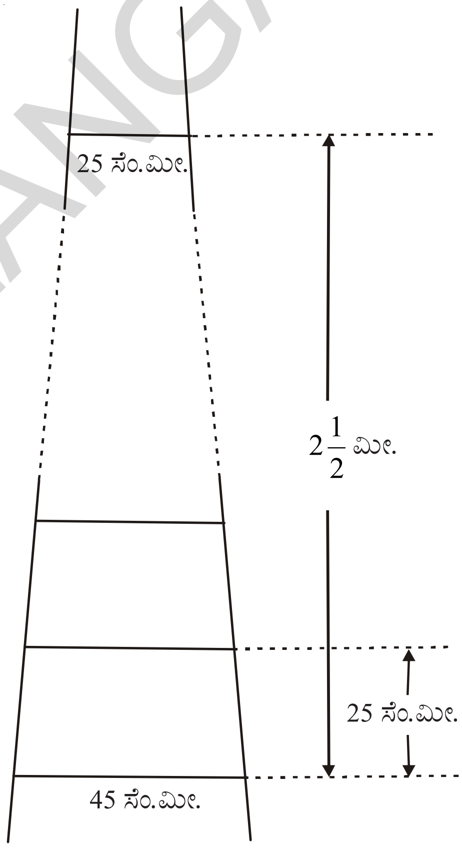
1. 121, 117, 113, . . ., ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟನೇ ಪದವು ಮೊದಲ ಋಣ ಪದ ಆಗುತ್ತದೆ.

[ಸೂಚನೆ : $a_n < 0$ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ $n$ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.]

2. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ, ಏಳನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 6 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 8 ಆದರೆ ಮೊದಲ 16 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಏಣಿಗೆ 25 ಮೆಟ್ಟಿಲು ಇವೆ. ಮೆಟ್ಟಿಲಿನ ಉದ್ದ ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಏಕ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಇದ್ದೂ, ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೊದಲ ಮೆಟ್ಟಿಲಿನ ಉದ್ದ 45 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಮೇಲಿನಿಂದ ಮೊದಲ ಮೆಟ್ಟಿನ ಉದ್ದ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಈ ಎರಡರ ನಡುವಿನ ದೂರ $2\frac{1}{2}$ ಮೀ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ತಯಾರಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಕಟ್ಟಿಗೆಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

[ಸೂಚನೆ : ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{250}{25} + 1$]




4. ಕೆಲವು ಮನೆಗಳು ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ 1 ರಿಂದ 49ವರೆಗೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಮನೆಗೆ ಕೊಡಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $x$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಮನೆಗೆ ಮೊದಲು ಇರುವ ಮನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು, ನಂತರ ಇರುವ ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ ಆ ಮನೆ ಸಂಖ್ಯೆ $x$ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ? ಮತ್ತು $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸೂಚನೆ : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ಫುಟ್‌ಬಾಲ್ ಗ್ರೌಂಡಿನಲ್ಲಿ 15 ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ಒಂದು ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರದೇಶ (Terrace) ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಮೆಟ್ಟಿಲು ಉದ್ದ 50 ಮೀ. ಮತ್ತ ಅಗಲ $\frac{1}{2}$ ಮೀ. ಮೊದಲ ಮೆಟ್ಟಿಲು ಭೂಮಿಯಿಂದ $\frac{1}{4}$ ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಮೆಟ್ಟಲು ಅದರ ಮುಂದಿರುವ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರದೇಶ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಆ ಮೆಟ್ಟಲಿನ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರದೇಶ ನಿರ್ಮಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್‌ನ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ಸೂಚನೆ : ಮೊದಲ ಅಟ್ಟಳಿಗೆ ನಿರ್ಮಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್ ಘನ ಫಲ = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 50$ ಮೀ$^3$]


6. ಒಂದು ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಲು 150 ಮಂದಿ ಕೂಲಿಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಎರಡನೇ ದಿನ ಅವರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ವರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರುವುದು ಬಿಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಮೂರನೇ ದಿನ ಮತ್ತೆ ನಾಲ್ವರು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬರುವುದು ಬಿಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿ ದಿನ ಇದೇ ರೀತಿ ನಡೆಯುವುದರಿಂದ ಆ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿ ಆಗುವುದಕ್ಕೆ ನಿಗದಿಗೊಂಡ ದಿನಗಳಿಗಿಂತ 8 ದಿನ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಹಿಡಿದಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಹಿಡಿದ ಒಟ್ಟು ದಿನಗಳು ಎಷ್ಟು? (ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿ ಆಗುವುದಕ್ಕೆ ಅವಸರವಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು '$x$' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ)

$$150x = \frac{x+8}{2}[2\times150+(x+8-1)(-4)]$$

[ಉತ್ತರ . $x = 17 \Rightarrow x + 8 = 17 + 8 = 25$]

7. ಒಂದು ಯಂತ್ರದ ಬೆಲೆ ₹5,00,000/- ಮೊದಲ ವರ್ಷ ಇದರ ಬೆಲೆ ತಗ್ಗುವಿಕೆ 15% , ಎರಡನೇ ವರ್ಷ $13\frac{1}{2}$%, ಮೂರನೇ ವರ್ಷ 12% .... ಈ ವಿಧಾನವು ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ 10 ವರ್ಷಗಳ ಅನಂತರ ಅದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಕೊಟ್ಟ ಶೇಕಡವೆಲ್ಲವೂ ಪ್ರಾರಂಭ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ಅನ್ವಯಿಸಿರುವುದು ನಡೆದಿದೆ.

[ಸೂಚನೆ : ಒಟ್ಟುತಗ್ಗುವಿಕೆ = $15 + 13\frac{1}{2}+12+\ldots$.10 ಪದಗಳು ]

$$S_n = \frac{10}{2}[30-13.5] = 82.5\%$$

$\therefore$ 10 ವರ್ಷ ಆ ನಂತರ ಅದರ ಬೆಲೆ =100 – 82.5 = 17.5 i.e., ಅಂದರೆ 5,00,000ರಲ್ಲಿ 17.5%

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

**ಸಮಾಂತರಶ್ರೇಢಿ – ಸಮಾಂತರಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.**

★ ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೇಢಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯೋ, ಅಲ್ಲವೋ ರೇಖಾಗಣಿತದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದು. (ಗ್ರಾಫ್ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು) ಮತ್ತು "ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿನ $n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಸಾಧಿಸುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ ಅಂಶಗಳು

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಪದಗಳೆಲ್ಲವುಗಳಿಗೆ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ '$d$' ಯನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಡುತ್ತಾ ಇರುವ ಆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುವರು. ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ '$d$' ಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುವರು.

   AP ನಲ್ಲಿ ಪದಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$, ಬೆಲೆಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅಂದರೆ $a_{k+1} - a_k$ ಬೆಲೆ ಸ್ಥಿರವಾದರೆ ಆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುವರು..

3. ಮೊದಲನೇ ಪದ $a$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d$ ಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $n$ ನೇ ಪದ $a_n = a + (n - 1) d$.

4. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ '$n$' ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

   $$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದ '$l$' ಆದರೆ ಆ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $S = \frac{n}{2}(a + l)$. ಇಲ್ಲಿ '$n$' ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

6. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಪದಗಳೆಲ್ಲಾ ಅವುಗಳ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ '$r$' ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುವರು. ಆ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ '$r$' ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುವರು.

   ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots.$

7. ಮೊದಲನೇ ಪದ '$a$', ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ '$r$' ಆಗಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $n$ ನೇ ಪದ $a_n = ar^{n-1}$.

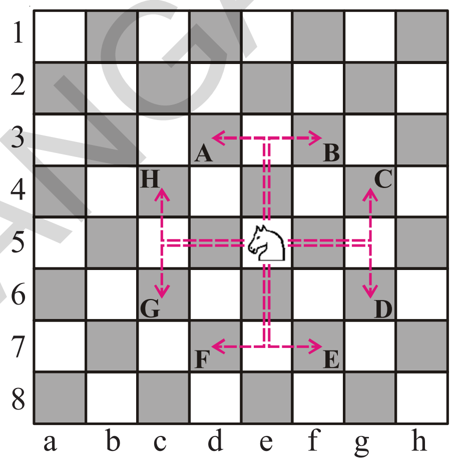
# ಅಧ್ಯಾಯ 7

# ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ

## (Coordinate Geometry)

## 7.1 ಪರಿಚಯ

ನಿಮಗೆ ಚದುರಂಗ ಆಟದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಅಲ್ಲವೆ ! ಅದರಲ್ಲಿ ಕುದುರೆ 'L' ಆಕಾರಕಲ್ಲಿ ( ಎರಡು ಹಂತಗಳು ಮುಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹಂತ ಪಕ್ಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ) ಕದಲುವುದು. ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ. ಇನ್ನೂ ಈ ಕುದುರೆ ಉಳಿದ ಕಾಯಿಗಳ ಮೇಲೆ ಜಿಗಿದು ಹೋಗುವುದು. ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂಟೆ ಎಷ್ಟು ಹಂತಗಳವರೆಗೆ ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟರವರೆಗೂ ಕರ್ಣಗಳ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವುದು.




ಚದುರಂಗದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಕಾಯಿಗಳು ಹೇಗೆ ಕದಲುವವೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದೇರೀತಿ ಕುದುರೆ , ಒಂಟೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಕಾಯಿಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಚದುರಂಗದ ಬೋರ್ಡಿನ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವು ಹೇಗೆ ಚಲಿಸುವವೋ ಗಮನಿಸಿರಿ.

i. ಕುದುರೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅದು ಕದಲುವಿಕೆ ನಾಲ್ಕು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೂ ಹೇಗೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ಗೆರೆಗಳೊಂದಿಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕುದುರೆಯ ಮೊದಲು Bನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಕೊಂಡು ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು f6. ಬಗೆ ಬಗೆಯ ಕದಲಿಕೆಗಳ ನಂತರ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಆ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

i. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಿಂದ A, B, C, D, E, F, G, H ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii. 8 ಕದಲಿಕೆಗಳ ನಂತರ ಕುದುರೆ ಕದಲಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಂದರೆ ಮೂಲಬಿಂದು (0, 0)ವಿನಿಂದ A, B, C, D, E, F, G ಮತ್ತು H ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

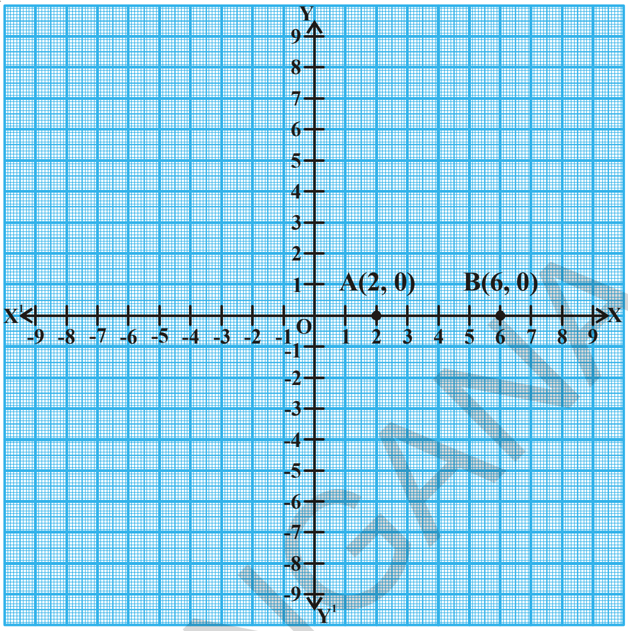
iii. H ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು? ಹಾಗೆ ಬಿಂದುಗಳಾದ A ಮತ್ತು Bಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ವೆಷ್ಟು?

## 7.2 ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

ಬಿಂದುಗಳು A (2, 0)ಮತ್ತು B (6, 0) X--ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ) ಇದ್ದಂತಾದರೆ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 4 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳೆಂದು ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಂತಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇ ಆ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದುಗಳು A (–2, 0) ಮತ್ತು B (–6, 0)ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ವೆಷ್ಟು?




ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ X-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (–6) – (–2) = –4 (ಋಣ ಬೆಲೆ)

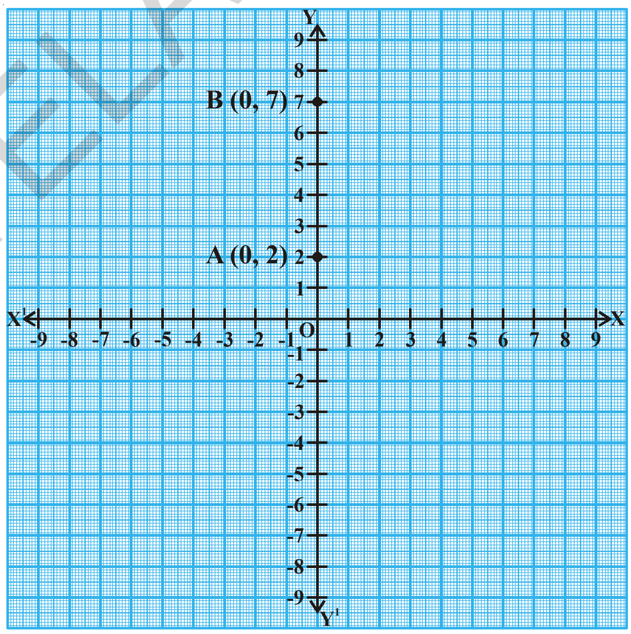
ದೂರವನ್ನು ನಾವುಯಾವಾಗಲೂ ಋಣ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ದೂರದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯನ್ನು (Absoute value)ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ ಆದರೆ A ಮತ್ತು Bಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $|x_2 - x_1|$




ಅದೇರೀತಿ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ Y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು..

ಬಿಂದುಗಳು $(0, y_1)$ $(0, y_2)$ ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $|y_2 - y_1|$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು A(0, 2) ಮತ್ತು B(0, 7) ಗಳಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $|7 - 2| = 5$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. (–4, 0), (2, 0), (6, 0), (–8, 0)ಬಿಂದುಗಳು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ?.
2. (i) (–4, 0) ಮತ್ತು (6, 0)ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು? (ii) (–4, 0) ಮತ್ತು (–8, 0)

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

1. (0, –3), (0, –8), (0, 6), (0, 4) ಬಿಂದುಗಳು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ?
2. (i) (0, –3), (0, –8) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು? (ii) (0, –3) ಮತ್ತು (0, –8)

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ x ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮವಾಗಿ (ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದೆ) ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ? ಉದಾಹರಣೆ (2,4) ಮತ್ತು (2,9)

## 7.3 ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_1)$ ಗಳಾದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ Y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದುಗಳು X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

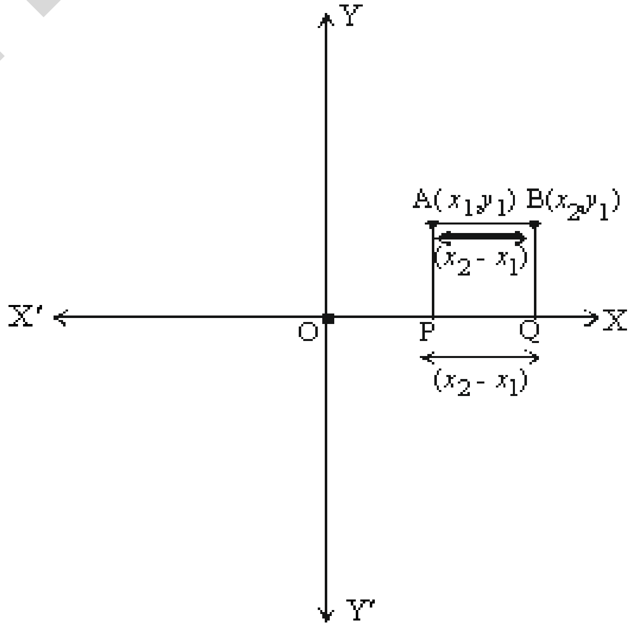
X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ AP ಮತ್ತು BQ ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ P ಮತ್ತು Q ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸಮ ಆಗುವುದು

ಆದ್ದರಿಂದ, AB=PQ

A, Bಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = P, Qಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$PQ = |x_2 - x_1|$ ($x$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)

ಅದೇರೀತಿ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_1, y_2)$ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $= |y_2 - y_1|$
(y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)



**ಉದಾಹರಣೆ -1.** A (4,0) ಮತ್ತು B (8, 0)ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $x$- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $|x_2 - x_1| = |8 - 4| = 4$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (8, 3), (–4, 3). ಆದರೆ A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ (8, 3) ಮತ್ತು (–4, 3) ಬಿಂದುಗಳು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚತುರ್ಥಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು $y$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಸಮ. ಆದಕ್ಕಾಗಿ

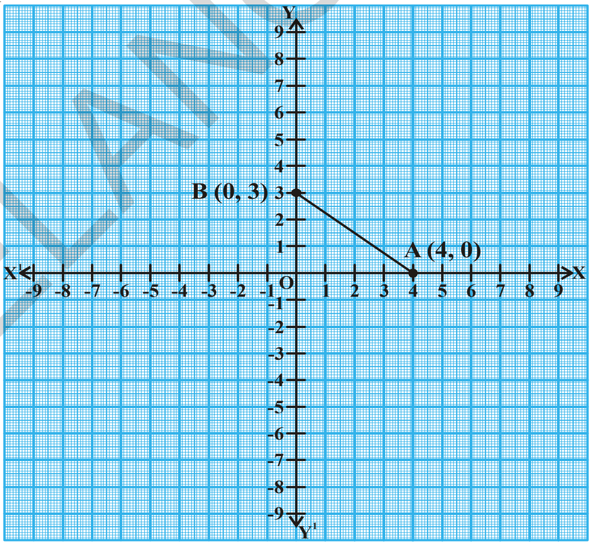
AB ನಡುವಿನ ದೂರ $= |x_2 - x_1| = |-4 - 8| = |-12| = 12$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (3, 8), (6, 8) (ii) (–4,–3), (–8,–3) (iii) (3, 4), (3, 8) (iv) (–5, –8), (–5, –12)

A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (4, 0), (0, 3) ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದು 'O' ಆದರೆ,




ಚಿತ್ರದಿಂದ $\Delta AOB$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

OA = 4 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ($x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ)

OB =3 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ($y$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ )

ಆದರೆ AB ನಡುವಿನ ದೂರ = ?

ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$
$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು}$$

$\Rightarrow$ A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ = 5 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) A = (2, 0) ಮತ್ತು B(0, 4) (ii) P(0, 5) ಮತ್ತು Q(12, 0)

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

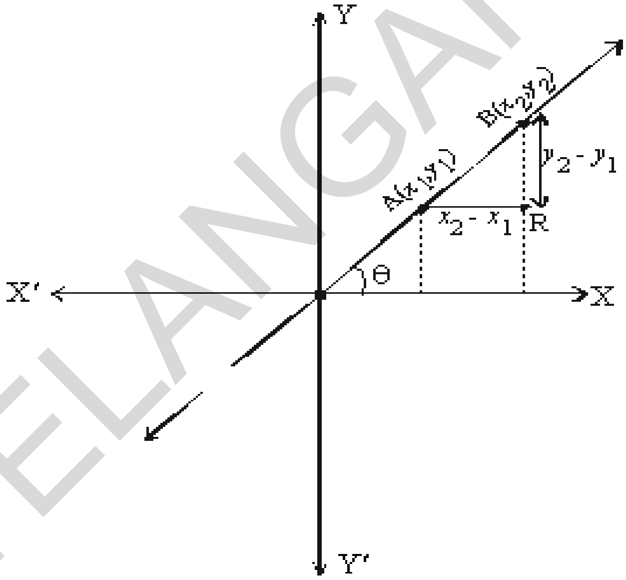
ಮೂಲಬಿಂದು 'O' ಮತ್ತು ಬಿಂದು A (7, 4)ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

1. ರಾಮು,ಬಿಂದು A($x_1$, $y_1$) ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದು O(0, 0)ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\sqrt{x^2+y^2}$ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದನು. ನೀವು ರಾಮು ತಿಳಿಸಿದ್ದರೊಂದಿಗೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ? ಇಲ್ಲವೇ? ಏಕೆ?

## 7.4 ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ (ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ) ನಡುವಿನ ದೂರ

A($x_1$, $y_1$) ಮತ್ತು B($x_2$, $y_2$)ಗಳು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ)




X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ AP ಮತ್ತು BQ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಬಿಂದು A ನಿಂದ BQರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ( R ಹತ್ತಿರ ) ARನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆಗ OP = $x_1$, OQ = $x_2$ ( ಏಕೆ? )

ಹಾಗೆಯೇ PQ = OQ – OP = $x_2 - x_1$

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ APQR ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇದು ಒಂದು ಆಯತ.

ಆದ್ದರಿಂದ PQ = AR = $x_2 - x_1$.

ಹಾಗೆಯೇ QB = $y_2$, QR = $y_1$,

ಆದ್ದರಿಂದ BR = QB – QR = $y_2 - y_1$

ΔARB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ)

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore$ AB = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ಆದ್ದರಿಂದ , A ಮತ್ತು Bಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರ

d = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ಇದನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುವರು.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

2. ರಾಮು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಬರೆದನು.

AB = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ಏಕೆ

**ಉದಾಹರಣೆ -3.** A(4, 3) ಮತ್ತು B(8, 6) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

AB ನಡುವಿನ ದೂರ $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (7, 8) ಮತ್ತು (–2, 3)    (ii) (–8, 6) ಮತ್ತು (2, 0)

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಒಂದು $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳು A(1, –3) ಮತ್ತು B(–4, 4) ಆದರೆ A, B ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಸಮೀಪದ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಅಂದಾಜಿಸಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :**

ಶ್ರೀಧರ್ ಎರಡು T(5, 2) ಮತ್ತು R(–4, –1) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 9.5 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಈಗ ನೀವು ಎರಡು P (4, 1)ಮತ್ತು Q (-5, -2) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಸಹ ಶ್ರೀಧರ್ ಪಡೆದ ಉತ್ತರವನ್ನೇ ಪಡೆದಿದ್ದೀರಾ? ಏಕೆ?

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -4.** A (4, 2), B (7, 5) ಮತ್ತು C (9, 7) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** A, B, C ಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇವೆ ಎಂದುಕೊಂಡು ಇದರಿಂದ AB+BC=AC

ಈಗ ನಾವು AB, BC, AC ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರದ ಸೂತ್ರ $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, $d = AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

$BC = \sqrt{(9-7)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

$AC = \sqrt{(9-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

ಇದರಿಂದ $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದುಗಳು (4, 2), (7, 5) ಮತ್ತು (9, 7) ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. (ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಏಕ ರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ).

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** ಬಿಂದುಗಳು (3, 2), (–2, –3) ಮತ್ತು (2, 3) ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆಯೇ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು P(3, 2), Q(–2, –3) ಮತ್ತು R(2, 3)ಗಳಿಂದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ PQ, QR ಮತ್ತು PR ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$PQ = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು(ಸುಮಾರಾಗಿ)

$QR = \sqrt{(2-(-2))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{(4)^2 + (6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು(ಸುಮಾರಾಗಿ)

$PR = \sqrt{(2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು(ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಮೇಲಿನವುಗಳ ದೂರಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮೂರನೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು.("ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವುಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು")

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು P, Q ಮತ್ತು R ಗಳು ಒಂದು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** (1, 7), (4, 2), (–1, –1) ಮತ್ತು (–4, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಚೌಕದ ಶೃಂಗಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1)ಮತ್ತು D(–4, 4) ಗಳು ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ABCD ಚೌಕವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಬೇಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಏರ್ಪಡುವ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಹ ಸಮಾನ ವಾಗಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು

$AB = d = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \text{ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು}$$

$$DA = \sqrt{(-4-1)^2+(4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \text{ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು}$$

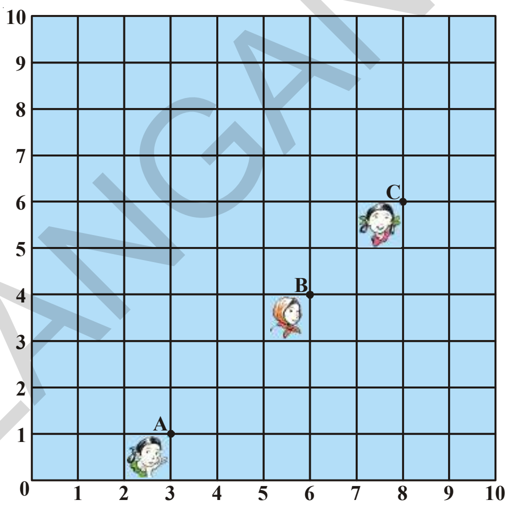
ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು $AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \text{ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು}$$

ಬಾಹುಗಳು $AB = BC = CD = DA$ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು $AC = BD$. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ABCD ಚೌಕದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು BD ಉದ್ದಗಳು ಸಮ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಒಂದು ಚೌಕವಾಗುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-7.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವು ಒಂದು ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿನ ಡೆಸ್ಕ್‌ಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಮಾಧುರಿ, ಮೀನ, ಪಲ್ಲವಿ ಯರು ಕ್ರಮವಾಗಿ A(3, 1), B(6, 4) ಮತ್ತು C(8, 6) ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತ್ತಿದ್ದಾರೆ.




ಅವರು ಮೂವರೂ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುವರೆಂದು ನೀವು ಭಾವಿಸುತ್ತಿರುವಿರೇ ?

ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$AB=\sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

$BC=\sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

$AC=\sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

ಇದರಿಂದ, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, ಆದ್ದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಮೂರು ಜನರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** ಬಿಂದು $(x , y)$ ಎನ್ನುವುದು A (7, 1) ಮತ್ತು B (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿದೆ. $x$ ಮತ್ತು $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಬಿಂದು $P(x, y)$ ಎನ್ನುವುದು A (7, 1) ಮತ್ತು B (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

ಇದರಿಂದ $AP = BP$. ಆದ್ದರಿಂದ, $AP^2 = BP^2$

$$\Rightarrow (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$

$\Rightarrow -8x + 8y = -16$

$\therefore\ x - y = 2$ (ಇದೇ $x$ ಮತ್ತು $y$ ನಡುವೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಬಂಧ)

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** A(6, 5) ಮತ್ತು B(–4, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(0, y)$ ಆಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು $P(0, y)$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$$PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

$\Rightarrow 36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

$\Rightarrow 4y = 36$

$\Rightarrow y = 9$

ಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವು (0, 9).

ಇದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

ಆದ್ದರಿಂದ (0, 9) ಎಂಬ ಬಿಂದು, (6, 5) ಮತ್ತು (4, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) (2, 3) ಮತ್ತು (4, 1) (ii) (–5, 7) ಮತ್ತು (–1, 3)

   (iii) (–2, –3) ಮತ್ತು (3, 2) (iv) $(a, b)$ ಮತ್ತು $(-a, -b)$

2. (0, 0) ಮತ್ತು (36, 15) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. (1, 5), (2, 3) ಮತ್ತು (–2, –1) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳು ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

4. (5, –2), (6, 4) ಮತ್ತು (7, –2) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೇ? ಇಲ್ಲವೋ ? ನೋಡಿರಿ.

5. A($a$, 0), B($-a$, 0), C(0, $a\sqrt{3}$) ಬಿಂದುಗಳು ಎನ್ನುವವು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. (–7, –3), (5, 10), (15, 8) ಮತ್ತು (3, –5) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಶೃಂಗಗಳಾಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. (–4, –7), (–1, 2), (8, 5) ಮತ್ತು (5, –4) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಶೃಂಗಗಳಾಗುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸೂಚನೆ : ವಜ್ರಾಕೃತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ)

8. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಚತುರ್ಭುಜ ಯಾವ ವಿಧವಾದದ್ದು ? ಅದರ ಹೆಸರನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತ ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) (–1, –2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0)   (ii) (–3, 15), (1, 10), (3, 1), (–1, –4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

9. X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುತ್ತಾ (2, –5) ಮತ್ತು (–2, 9) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ($x$, 7) ಮತ್ತು (1, 15) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 10ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಾದರೆ $x$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

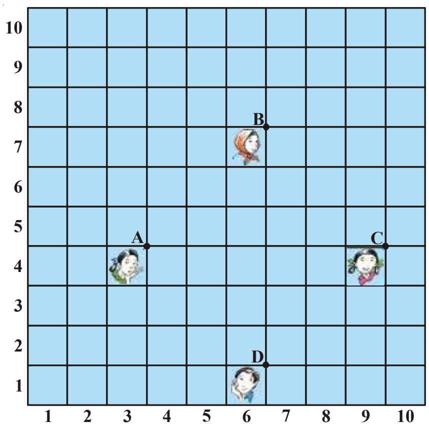
11. P(2, –3) ಮತ್ತು Q(10, $y$) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 10ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಾದರೆ $y$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು

12. (–5, 6) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಾ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (3, 2) ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. (1, 5), (5, 8) ಮತ್ತು (13, 14) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲೆವೇ? ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

14. ($x$, $y$)ಬಿಂದು , (–2, 8) ಮತ್ತು (–3, –5) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ $x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

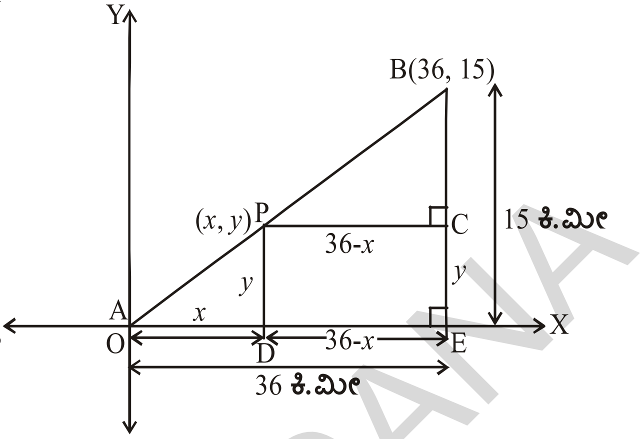
15. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ , ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ವರು ಸ್ನೇಹಿತರು A, B, C ಮತ್ತು D ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ. ಜರೀನಾ ಮತ್ತು ಫಣಿ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಗೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿ, ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಆಕಡೆ, ಈಕಡೆ ತಿರುಗುತ್ತಾ ಕೆಲವು ನಿಮಿಷಗಳು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ನಂತರ, ಜರೀನಾ ಫಣಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಕೇಳಿದಳು. “ABCDಒಂದು ಚೌಕ ವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನೀವು ಭಾವಿಸುವುದಿಲ್ಲವೇ?” ಅದಕ್ಕೆ ಫಣಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಿಲ್ಲ. ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯಾರ ಉತ್ತರ ಸರಿಯಾಗಿದೆ? ಏಕೆ? ತಿಳಿಸಿರಿ.




16. ($x$, $y$) ಬಿಂದು (7, 1) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಆದರೆ $x$ ಮತ್ತು $y$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 7.5 ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ (SECTION FORMULA)

ಒಂದು ಟೆಲಿಫೋನ್ ಕಂಪೆನಿಯವರು A ಮತ್ತು B ನಡುವೆ P ಹತ್ತಿರ ಒಂದು ರಿಲೇ ಟವರನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಟವರನ್ನು ಅವರು A ನಿಂದ Pಗೆ ಇರುವ ದೂರಕ್ಕಿಂತ ಎರಡರಷ್ಟು ದೂರ P ಯಿಂದ B ನಡುವೆ ಇರುವ ವಿಧವಾಗಿ ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. Pಎಂಬ ಬಿಂದು ABರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಂತಾದರೆ ಆ ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ) ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.




A ಯು ಮೂಲಬಿಂದು O ಬಳಿ ಇದೆ ಎಂದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳಮೇಲೆ 1 ಕಿ.ಮೀ ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ , ಹಾಗೆಯೇ ಬಿಂದು B ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು(36, 15) ಆದರೆ ರಿಲೇ ಟವರಿನ ಸ್ಥಾನ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದರೆ ನಾವು P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ತಪ್ಪದೇ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಹೇಗೆ?

ಬಿಂದು Pನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, y)$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ನಿಂದ ಮತ್ತು B ನಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ $x$-ಅಕ್ಷದಮೇಲೆ D ಮತ್ತು E ಹತ್ತಿರ ಸೇರುವ ಹಾಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P ನಿಂದ C ಬಳಿ BE ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಆರನೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ಕೋನ, ಕೋನ ಸಮರೂಪತೆ ನಿಯಮದ ಮೂಲಕ $\Delta POD$ ಮತ್ತು $\Delta BPC$ ಗಳು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{x}{36-x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{y}{15-y} = \dfrac{1}{2}$.

$2x = (36 - x)$ $\qquad$ $2y = 15 - y$

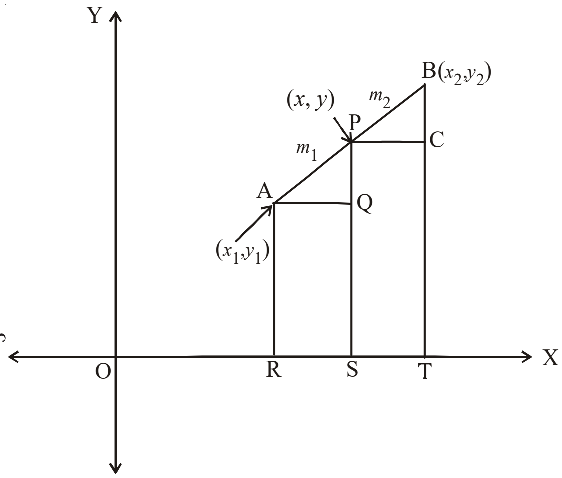
$3x = 36$ $\qquad$ $3y = 15$

$x = 12$ $\qquad$ $y = 5$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ $x = 12$ ಮತ್ತು $y = 5$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಬಿಂದು P(12, 5) ರೇಖೆಯನ್ನು OP : PB = 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೆವೆ ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನು ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು P $(x, y)$ ಎನ್ನುವುದು AB ಯನ್ನು $m_1 : m_2$, ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ



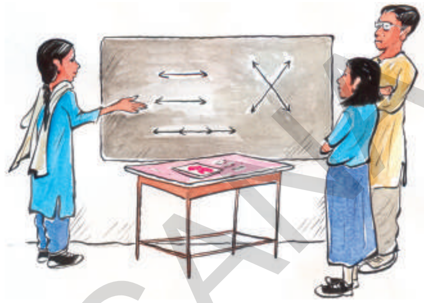

i.e., $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ..... (1) (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರಿ).

AR, PS ಮತ್ತು BT ಗಳನ್ನು $x$-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

AQ ಮತ್ತು PC ಗಳನ್ನು X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುವಹಾಗೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಕೋನ, ಕೋನ ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದಿಂದ

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{PC} = \dfrac{PQ}{BC}$ .....(2)



ಈಗ, $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \qquad \left[\because \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ (1) ರಿಂದ}\right]$$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$, ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\Rightarrow x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$, ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\Rightarrow y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರಿಕವಾಗಿ $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದು $P(x, y)$ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad .....(3)$$

ಇದನ್ನೇ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

Y –ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ A, P ಮತ್ತು Bಮೇಲೆ ಗಳಿಂದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಸಹ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು..

AB ರೇಖೆಯನ್ನು Pಬಿಂದು $k : 1$ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಆಗ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು.

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

**ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭ :** ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು P ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

ಈಗ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-10.** ಬಿಂದುಗಳು (4, –3) ಮತ್ತು (8, 5) ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (3 : 1) ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಬೇಕಾದ ಬಿಂದು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $P(x, y)$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right),$$

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದು $P(x, y) = (7, 3)$

**ಉದಾಹರಣೆ -11.** (3, 0) ಮತ್ತು (-1, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)$. ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು $M(x, y)$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

$$\text{ಮಧ್ಯಬಿಂದು } M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

∴ (3, 0) ಮತ್ತು (-1, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು $M(x, y)$ ಆದರೆ

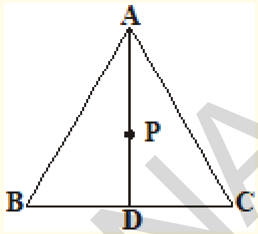
$$M(x, y) = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2).$$

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

1. (3, 5) ಮತ್ತು (8, 10) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. (2, 7) ಮತ್ತು (12, –7) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

$A(4, 2)$, $B(6, 5)$ ಮತ್ತು $C(1, 4)$ ಬಿಂದುಗಳು $\Delta ABC$ಯ ಶೃಂಗಗಳು.

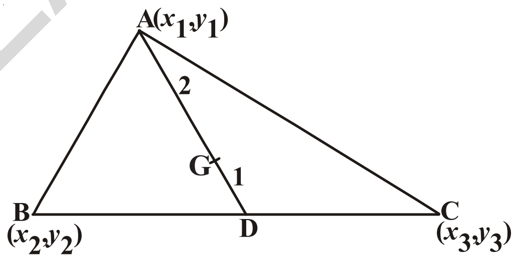



1. AD BC ಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯ ರೇಖೆ Dಬಳಿ ಸೇರತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ Dಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. AP : PD = 2 : 1.ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ AD ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ Pಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಮಧ್ಯರೇಖೆ BE ಮತ್ತು ಮಧ್ಯರೇಖೆ CF ಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಮತ್ತು R ಗಳಿಗೆ 2:1 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?

'ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ ಆಗುತ್ತದೆ .

## 7.6 ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಏಕೀಭವಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು (ಛೇಧನ ಬಿಂದು) ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.




$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳು $\Delta ABC$ಯ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

AD ಎಂಬ ಮಧ್ಯರೇಖೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ BCಯನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.

$$\therefore \quad D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು (ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ) $G(x, y)$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right].$$

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** (3, –5), (–7, 4), (10, –2) ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2,-1)$$

$\therefore$ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (2, –1).

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

(–4, 6), (2, –2) ಮತ್ತು (2, 5) ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

(2, 3), $(x, y)$, (3, –2) ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಮೂಲಬಿಂದು ಆದರೆ $(x, y)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ -13.** A(– 6, 10) ಮತ್ತು B(3, – 8) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (– 4, 6) ಬಿಂದು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಿಂದು (– 4, 6) ಅಂತರಿಕವಾಗಿ $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೊಂಡರೆ

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}\right) \qquad .....(1)$$

$(x, y) = (a, b)$ ಆದರೆ $x = a$ ಮತ್ತು $y = b$ ಎಂದು ನವಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $-4 = \dfrac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}$ ಮತ್ತು $6 = \dfrac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$

ಈಗ, $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ಇದರಿಂದ

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

ಎಂದರೆ $7m_1 = 2m_2$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

ಎಂದರೆ $m_1 : m_2 = 2 : 7$

ಈ ಅನುಪಾತ $y$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೂ ಸಹ ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುತ್ತದೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಈಗ, $\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$ ( ಅಂಶ, ಛೇಧಗಳನ್ನು $m_2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{-16}{7} + 10}{\frac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

ಆದ್ದರಿಂದ A(–6,10) ಮತ್ತು B (3, –8) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (–4, 6) ಬಿಂದು ಎನ್ನುವುದು 2 : 7 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

A(6, 9) ಮತ್ತು B(–6, –4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು

(a) ಮೂಲಬಿಂದು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ? $\overline{AB}$ ಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ?

(b) P(2, 3) ಬಿಂದು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ?

(c) Q(–2, –3) ಬಿಂದು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ?

(d) P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು $\overline{AB}$ ಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ?

(e) P ಮತ್ತು Q ಗಳನ್ನು $\overline{AB}$ ಗೆ ಏನೆನ್ನುವರು?

## 7.7 ರೇಖೆಯ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು (TRISECTIONAL POINTS OF A LINE)

ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು 'ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು' ಎನ್ನುವರು.

**ಉದಾಹರಣೆ -14.** A(2,–2) ಮತ್ತು B(–7, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** AB ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು P ಮತ್ತು Q ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

AP=PQ=QB (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ).


ಆದ್ದರಿಂದ, AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದು ಅಂತರಿಕವಾಗಿ 1 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

ಈಗ Q ಬಿಂದು ಸಹ ABರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರಿಕವಾಗಿ 2 : 1.ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಅದರಂತೆ, ಬಿಂದು Q ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು P(-1, 0) ಮತ್ತು Q(-4, 2)

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. (2, 6) ಮತ್ತು (–4, 8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. (–3, –5) ಮತ್ತು(–6, –8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ..

**ಉದಾಹರಣೆ -15.**(5, −6) ಮತ್ತು (−1, −4)ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು Y-ಅಕ್ಷವು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ? ಆ ಛೇಧನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** A(5, −6) ಮತ್ತು B(−1, −4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ರೇಖಾಖಂಡವು AB ಯನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು K : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು.

$$\left(\frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1}\right)$$

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$

ಆದರೆ y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸೊನ್ನೆ(0)ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{-K+5}{K+1} = 0$

$-K + 5 = 0 \Rightarrow K = 5.$

ಅದರಂತೆ, $K : 1 = 5 : 1$

$K = 5$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$= \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right) = \left(0, \frac{-20-6}{6}\right) = \left(0, \frac{-26}{6}\right) = \left(0, \frac{-13}{3}\right)$$

**ಉದಾಹರಣೆ-16.** A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) ಮತ್ತು D(9, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** A(7, 3), B(6, 1), C(8, 2) ಮತ್ತು D(9, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದುಕೊಂಡರೆ.

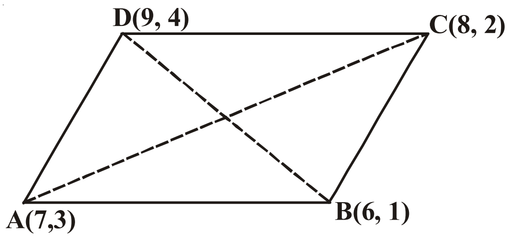
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು DB ಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕು.

ಈಗ, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕರ್ಣಗಳು AC ಮತ್ತು DB ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ

ACಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು = $\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

DBಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು = $\left(\frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$




ಇದರಿಂದ,AC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು = DBಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, A, B, C, D ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ -17.** A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) ಮತ್ತು D($p$, 3) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ P ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ACಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು = BDಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು.

ಅಂದರೆ, $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7.$$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.2

1. (–1, 7) ಮತ್ತು (4, –3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. (4, –1) ಮತ್ತು (–2, –3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. (–3, 10) ಮತ್ತು (6, –8) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ (–1, 6) ಬಿಂದುವನ್ನು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. (1, 2), (4, $y$), ($x$, 6) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ $x$ ಮತ್ತು $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. AB ವ್ಯಾಸ್ಯವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (2, –3) ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು B(1, 4)ಆದರೆ A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (–2, –2) ಮತ್ತು (2, –4). AP = $\frac{3}{7}$ AB ಆಗುವ ವಿಧವಾಗಿ AB ಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. A(–4, 0) ಮತ್ತು B(0, 6) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. A(–2, 2) ಮತ್ತು B(2, 8) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $(a+b, a-b)$ ಮತ್ತು $(a-b, a+b)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರಿಕವಾಗಿ 3 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

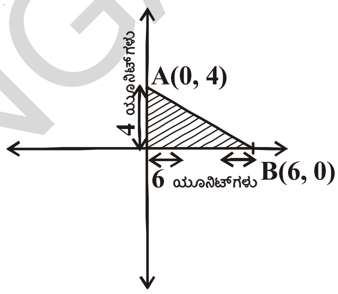
10. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:
    i. (-1, 3), (6, -3) ಮತ್ತು (-3, 6)    ii. (6, 2), (0, 0) ಮತ್ತು (4, -7)
    iii. (1, -1), (0, 6) ಮತ್ತು (-3, 0)

11. AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು C 2 : 3 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. B ಮತ್ತು C ನ ಬಿಂದುಗಳು (–5, 6) ಮತ್ತು (3, 6) ಆದರೆ A $(x, y)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. AB ರೇಖಾಖಂಡವು ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದಾಗಿದೆ. P(3, 6) AB ಯನ್ನು 2 : 3 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 7.8 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ A(0, 4) ಮತ್ತು B(6, 0) ಬಿಂದುಗಳು ಮೂಲಬಿಂದು O ಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.




$\Delta$AOB ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

$\Delta$AOB ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. ಅದರ ಪಾದ 6 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ( x ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ) ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ( y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ).

$$\therefore\ \Delta AOB \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times \text{ಪಾದ} \times \text{ಎತ್ತರ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು}$$

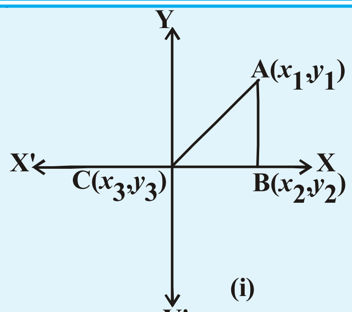
### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು A ಯನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು B ಯನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ತ್ರಿಭುಜ $\Delta$AOB ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರು ಮಾಡಿದವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

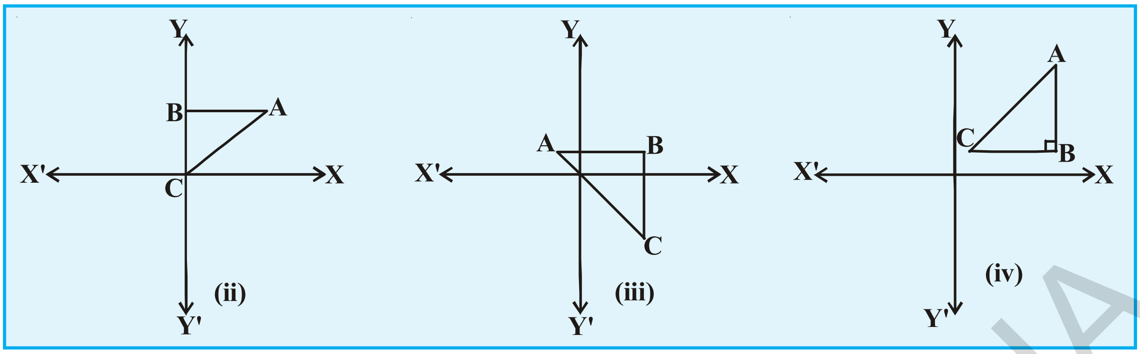
### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕುರಿತು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.

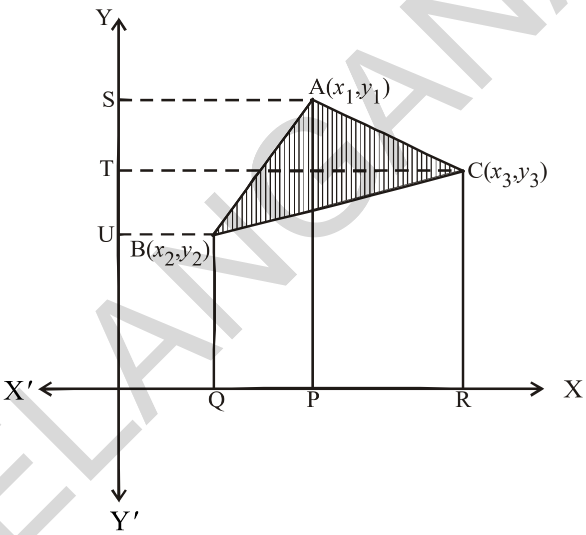


(i)




**ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :**

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದು $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. A, B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ $x$-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಕ್ಕೆ AP, BQ ಮತ್ತು CR ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.




ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಹಾಗೆ ABQP, APRC ಮತ್ತು BQRC ಗಳು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತಿವೆ..

ಈಗ ಚಿತ್ರದಿಂದ

$\Delta$ABC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABQP ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ APRC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ BQRC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\Delta ABC \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2}(BQ+AP)QP + \frac{1}{2}(AP+CR)PR - \frac{1}{2}(BQ+CR)QR \quad .... (1)$$

$\because$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ (ಸವಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ) (ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ)

ಈಗ, ಚಿತ್ರದಿಂದ

$BQ = y_2,\ AP = y_1,\ QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3,\ PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\Delta$ABC ವಿಸ್ತೀರ್ಣ [ (1)ರಿಂದ]

$$= \frac{1}{2}\left|(y_2+y_1)\ (x_1-x_2)\right| + \frac{1}{2}\left|(y_1+y_3)\ (x_3-x_1)\right| - \frac{1}{2}\left|(y_3+y_3)\ (x_3-x_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right|$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರ

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎನ್ನುವುದು ಅಳತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು. ಇದನ್ನು ಋಣಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ $|-2| = 2$.

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-18.** ಬಿಂದುಗಳು (1, –1), (–4, 6) ಮತ್ತು (–3, –5) ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC$ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು A(1, –1), B(–4, 6) ಮತ್ತು C(–3, –5) ಗಳಾದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|11 + 16 + 21\right| = 24$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 24 ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

**ಉದಾಹರಣೆ -19.** ಬಿಂದುಗಳು A(5, 2), B(4, 7) ಮತ್ತು C(7, –4) ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ..

**ಪರಿಹಾರ :** ಬಿಂದುಗಳು A(5, 2), B(4, 7) ಮತ್ತು C(7, –4) ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{1}{2}\left|5(7+4) + 4(-4-2) + 7(2-7)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|55 - 24 - 35\right| = \left|\frac{-4}{2}\right| = |-2|$$

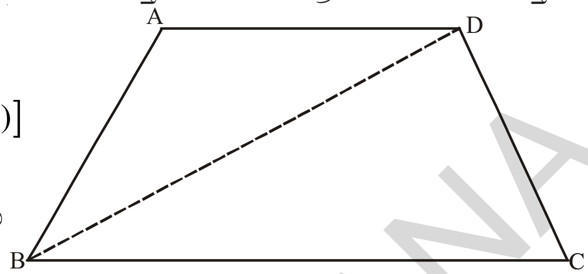
ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2$ ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಶೃಂಗಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. (5, 2) (3, –5) ಮತ್ತು (–5, –1)
3. (6, –6), (3, –7) ಮತ್ತು (3, 3)

**ಉದಾಹರಣೆ -20.** ಬಿಂದುಗಳು A(–5, 7), B(–4,–5), C(–1, –6) ಮತ್ತು D(4,5) ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, • ABCD ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. .

**ಪರಿಹಾರ:** ಬಿಂದು B, D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಎಂಬ ABD,ಮತ್ತು BCD.ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ.,




$\Delta ABD$ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\left[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(50+8+48) = \frac{106}{2} = 53$$ ಚ. ಯೂ

ಅದೇರೀತಿ, $\Delta BCD$ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}\left[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[44-10+4\right] = 19$$ ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

ಈಗ, $\Delta ABD$ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + $\Delta BCD$ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 53+19 = 72 ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

, ಆದುದರಿಂದ, • ABCDಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 72 ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು.

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

(0, –1), (2, 1) (0, 3) ಮತ್ತು (–2, 1)ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (2, 0), (1, 2), (1, 6)

(ii) (3, 1), (5, 0), (1, 2)

(iii) (–1.5, 3), (6, 2), (–3, 4)

ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗ್ರಾಫ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ?

ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಡನೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಚದರ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲವೇ? ಹಾಗಾದರೆ ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

### 7.8.1. ಬಿಂದುಗಳ ಏಕರೇಖಾಗತ (COLLINEARITY )

ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಅವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಲಾರವು. ಅಂದರೆ $\Delta ABC$ ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸೊನ್ನೆ '0'.

ಯಾವಾಗ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸೊನ್ನೆ '0' ಆಗುತ್ತದೆಯೋ ಆಗ ಆ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ' ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳು ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ -21.** ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು (3, –2) (–2, 8) ಮತ್ತು (0, 4) ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|12 - 12\right| = 0$$

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸೊನ್ನೆ (0) ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತ ಬಿಂದುಗಳು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೋ? ಇಲ್ಲವೋ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

(i) (1, –1), (4, 1), (–2, –3)

(ii) (1, –1), (2, 3), (2, 0)

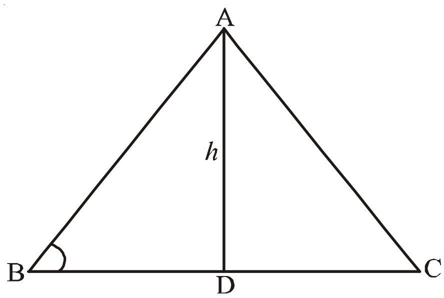
(iii) (1, –6), (3, –4), (4, –3)

### 7.8.2. ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - 'ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರ '

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ $\frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ, ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ, ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಗಬಹುದು. ಆಗ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವೇ

ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ, ಎತ್ತರಗಳು ತಿಳಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.




ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜ ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾದರೆ ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ತಿಳಿಯುತ್ತವೆ.

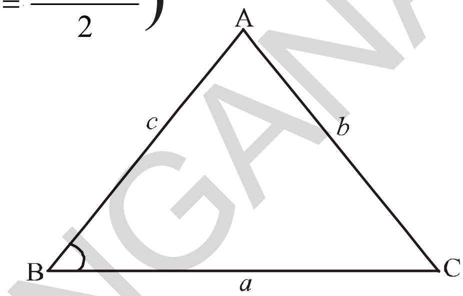
ಆಗ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ? ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಬೇಕಾದರೆ ತಪ್ಪದೇ ನಮಗೆ ಎತ್ತರ (h) ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ "ಹೆರಾನ್" ಎಂಬ ಗ್ರೀಕು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ $a$, $b$ ಮತ್ತು $c$ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾನೆ. ಅದು

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \quad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 12ಮೀ., 9ಮೀ., 15ಮೀ. ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}, \quad \left(\because S = \frac{a+b+c}{2}\right)$$




$$S = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18\text{ಮೀ}$$

ಆಗ $S - a = 18 - 12 = 6$ಮೀ

$S - b = 18 - 9 = 9$ಮೀ

$S - c = 18 - 15 = 3$ಮೀ

$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} = 54$ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

(i) 15ಮೀ, 17ಮೀ, 21ಮೀ ಬಾಹುಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ(ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಬಿಂದು (0, 0), (4, 0), (4, 3) ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ 22.** ಬಿಂದುಗಳು A(1, 2), B(–1, $b$), C(–3, –4) ಏಕರೇಖಾಗತಗಳಾದರೆ '$b$'ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು A(1, 2), B(–1, $b$), C(–3, –4)

$x_1 = 1, y_1 = 2;$ $\quad x_2 = -1, y_2 = b;$ $\quad x_3 = -3,\ y_3 = -4$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಇನ್ನೂ, $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ ಎಂದು ಗೊತ್ತು.

$\therefore \frac{1}{2}\left|1(b+4) + (-1)(-4,-2) + (-3)(2-b)\right| = 0$ ($\because$ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳು)

$|b + 4 + 6 - 6 + 3b| = 0$

$|4b + 4| = 0$

$4b + 4 = 0$

$\therefore b = -1$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.3

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) (2, 3) (–1, 0), (2, –4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)
   (iii) (0, 0), (3, 0) ಮತ್ತು (0, 2)
2. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತಗಳಾದರೆ 'K' ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) (7, –2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, –4), (2, –5)
   (iii) (K, K) (2, 3) ಮತ್ತು (4, –1).
3. ಬಿಂದುಗಳು (0, –1), (2, 1) ಮತ್ತು (0, 3)ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಮತ್ತು ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ .
4. ಬಿಂದುಗಳು (–4, –2), (–3, –5), (3, –2) ಮತ್ತು (2, 3)ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರ ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) (1, 1) (1, 4) ಮತ್ತು (5, 1) (ii) (2, 3), (–1, 3) ಮತ್ತು (2, –1)

## 7.9 ಸರಳರೇಖೆ

ಭರದ್ವಾಜ್ ಮತ್ತು ಮೀನಾ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

**ಭರದ್ವಾಜ್**: ನೀನು $2x + 3y = 12$ ಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆಯಾ?

**ಮೀನಾ** : ಹೌದು, ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದ್ದೇನೆ ನೋಡು

| $x$ | 0 | 3 | 6 | –3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2 | 0 | 6 |

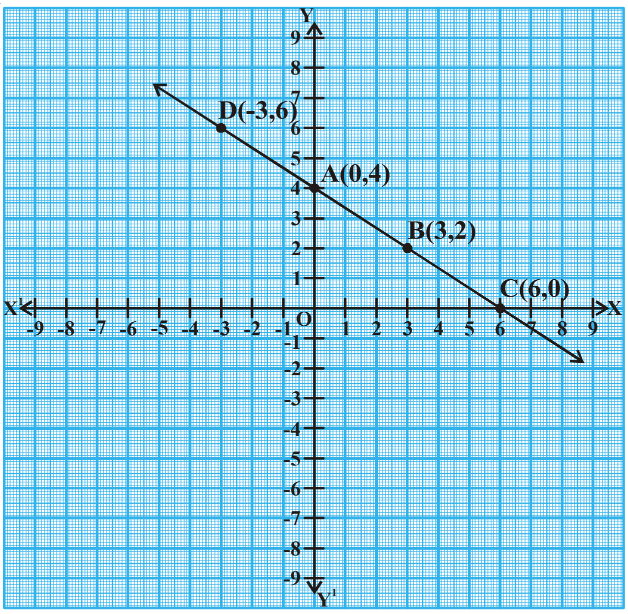
$$2x+3y = 12$$
$$3y = 12 - 2x$$
$$y = \frac{12-2x}{3}$$

**ಮೀನಾ** : ನೀನು ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲೆಯಾ?

**ಭರದ್ವಾಜ್** : ಹೌದು, (0, 4), (3, 2), (6, 0), (–3, 6)

ಮೀನಾ, ನೀನು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ (ನಕ್ಷೆ) ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ?

**ಮೀನಾ** : ನಾನು ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನುಸೇರಿಸುತ್ತಾ ರೇಖೆಯನ್ನುಎಳೆದಿದ್ದೇನೆ. ನೋಡು.



**ಭರದ್ವಾಜ್** : ಈ ರೇಖೆ ಯಾವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ?

**ಮೀನಾ** :ಇದು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ.

**ಭರದ್ವಾಜ್** : ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ?

ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವಲ್ಲಿ ಮೀನಾಗೆ ನೀವು ಸಹಾಯ ಮಾಡಬಲ್ಲಿರಾ?

.................., .................., .................., ..................

ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $\overline{AB}$ ಯನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ ?

$\overline{AB}$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡ.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

1. A(1, 2), B(–3, 4), C(7, –1)
2. P(3, –5) Q(5, –1), R(2, 1), S(1, 2)

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ? ಯಾವುದು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ? ಏಕೆ?

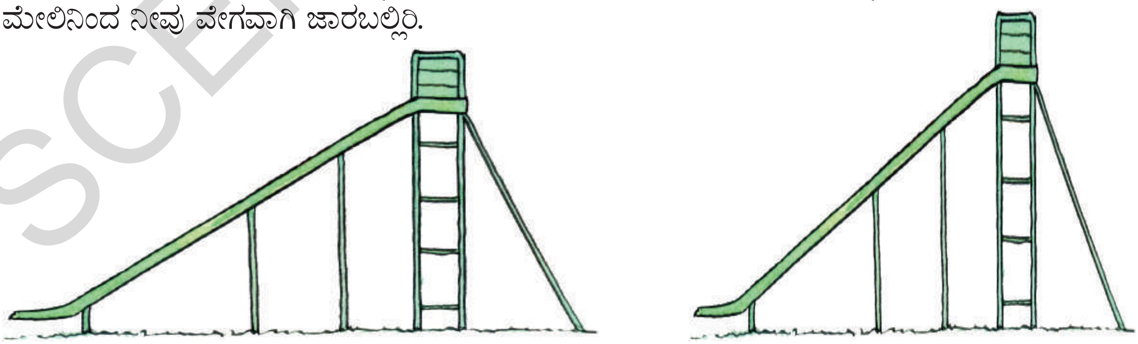
**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

$y = x + 7$ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಯೇ? ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಸರಳರೇಖೆ X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ? ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಈ ಸರಳರೇಖೆ Y-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಕೋನ ಮಾಡುತ್ತದೆ? ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

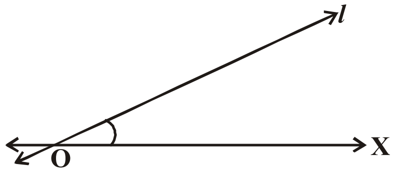
## 7.9.1 ಸರಳರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರು

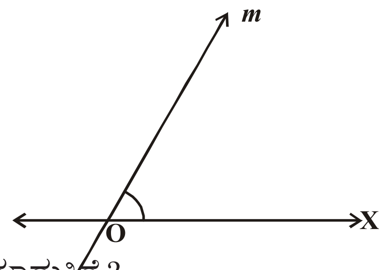
ನೀವು ಪಾರ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಜಾರುವ ಏಣಿಯನ್ನು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜಾರುವ ಏಣಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಯಾವುದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ನೀವು ವೇಗವಾಗಿ ಜಾರಬಲ್ಲಿರಿ.



ನೀವು ಹೇಳುವುದು "ಎರಡನೆಯದು" ಹೌದಲ್ಲವೇ? ಏಕೆ?

ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.




OX ನೊಂದಿಗೆ ಯಾವ ರೇಖೆ ಹೆಚ್ಚು ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ ?

OX ನೊಂದಿಗೆ ರೇಖೆ '*l*' ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ರೇಖೆ "*m*" ಮಾಡುವ ಕೋನ ಹೆಚ್ಚು. ಆದ್ದರಿಂದ OX ಆಧಾರವಾಗಿ ರೇಖೆ '*l*' ಗಿಂತಲೂ ರೇಖೆ '*m*' ಇಳಿಜಾರು ಹೆಚ್ಚು.

ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ?

## ಚಟುವಟಿಕೆ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತಾ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

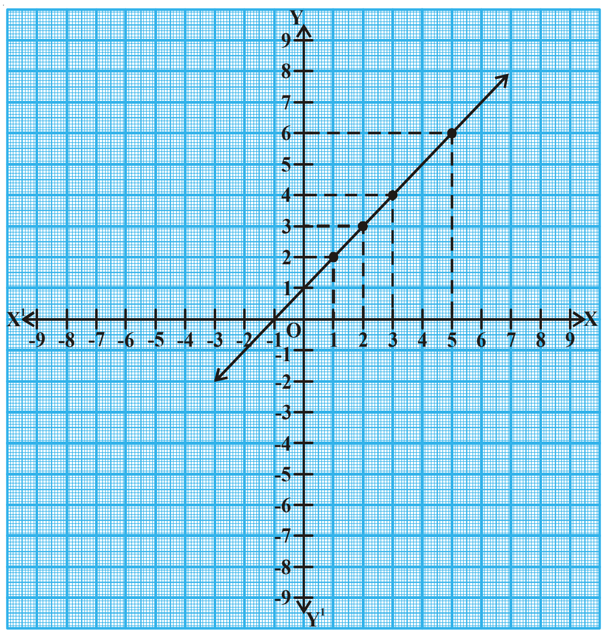
$x$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ $y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $y_1 = 0$ ನಿಂದ $y_2 = 2$ ಗೆ ಬೆಳೆದಾಗ

$y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = ........................

ಆಗ ಅನುರೂಪ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = ...

$\therefore \dfrac{y \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{x \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}$ =.................




$y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $y_1 = 2$ ನಿಂದ $y_3 = 4$ ಗೆ ಬೆಳೆದಾಗ

$y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = ..................

ಆಗ ಅನುರೂಪ $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = ...

$\therefore \dfrac{y \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{x \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}$ =..................

ಇನ್ನೂ ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತಾ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

| $y$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕದಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ | $x$ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸ | $\frac{y \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{x \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | $\frac{2}{1} = 2$ |
| - | - | - |
| - | - | - |

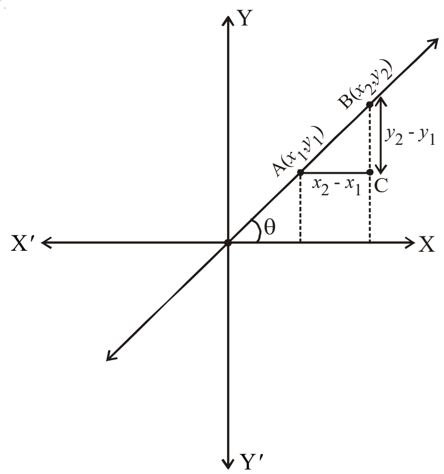
ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ $y$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಮತ್ತು $x$-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಇರುವ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಆ ರೇಖೆಯ ವಾಲು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆರೇಖೆ X-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧ ಇದೆ.

### 7.9.2 ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರು (Slope of a line joining Two Points)

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)$ ಗಳು $y$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು.

$$\text{ರೇಖೆಯ '}l\text{' ನ ವಾಲು} = \frac{y \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{x \text{ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}$$

$$\text{ರೇಖಾಖಂಡ } \overline{AB} \text{ ಇಳಿಜಾರು} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$




ಇಳಿಜಾರನ್ನು '$m$' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು '$l$' ರೇಖೆ X-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ 'θ' ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ರೇಖೆಯವಾಲನ್ನು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರ, '$m$' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ A$(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು B$(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಹೊಂದಿದ

$$\text{ರೇಖೆಯವಾಲು} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\overline{AB}$ ಎನ್ನುವುದು ರೇಖೆ $\overline{AC}$ ಯೊಂದಿಗೆ ಸಹ 'θ 'ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\text{ಕೋನ 'θ 'ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಕೋನ 'θ 'ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}}$$

$$= \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \therefore \quad \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\therefore\ m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ಇದು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡ $\overline{AB}$ ಯ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ.

X-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ರೇಖೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ '$\theta$ ' ಆದರೆ, ಆಗ ಇಳಿಜಾರು $m = \tan\theta$.

**ಉದಾಹರಣೆ 23.** ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಆದಿ, ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (2, 3), (4, 5). ಆದರೆ ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ರೇಖಾಖಂಡದ ಆದಿ, ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (2, 3), (4, 5)ಆದರೆ ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಇಳಿಜಾರು

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡದ ಇಳಿಜಾರು = 1.

### ಇವು ಮಾಡಿರಿ

ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡ $\overleftrightarrow{AB}$ ಯ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. A(4, –6) B(7, 2)
2. A(8, –4), B(–4, 8)
3. A(–2, –5), B(1, –7)

### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(–4, 2), B(–4, –2)
3. A(–2, 8), B(–2, –2)
4. ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖಾಖಂಡ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾದುದ್ದೇ ? ಏಕೆ? ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಇಳಿಜಾರು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

A(3, 2), B(–8, 2)ಬಿಂದುಗಳು $\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$\overleftrightarrow{AB}$ ರೇಖೆ ಯಾವಾಗ X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ? ಏಕೆ? ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

**ಉದಾಹರಣೆ -24.** P(2, 5) ಮತ್ತು Q($x$, 3)ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರು 2 ಆದರೆ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** P(2, 5) ಮತ್ತು Q($x$, 3)ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರು 2.

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = 2, \quad y_1 = 5, \quad x_2 = x, \quad y_2 = 3$

$$\overline{PQ} \text{ ಇಳಿಜಾರು} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{x-2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow \frac{-2}{x-2} = 2$$

$$\Rightarrow -2 = 2x - 4 \qquad \Rightarrow 2x = 2 \qquad \Rightarrow x = 1$$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.4

1. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಎಳೆದ ರೇಖೆಗಳ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (4, –8) ಮತ್ತು (5, –2)

(ii) (0, 0) ಮತ್ತು $(\sqrt{3}, 3)$

(iii) (2$a$, 3$b$) ಮತ್ತು ($a$, –$b$)

(iv) ($a$, 0) ಮತ್ತು (0, $b$)

(v) A(–1.4, –3.7), B(–2.4, 1.3)

(vi) A(3, –2), B(–6, –2)

(vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right)$, $B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$

(viii) A(0, 4), B(4, 0)

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

[ಈ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಉದ್ದೇಶಿಸಿದವು ಅಲ್ಲ]

1. ವೃತ್ತ 'Q'ನ ಕೇಂದ್ರ Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಮತ್ತು ಈ ವೃತ್ತದ (0, 7) ಮತ್ತು (0, –1) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತವೆ. ವೃತ್ತ 'Q' ಧನ X-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಬಿಂದು (P, 0) ಹತ್ತಿರ ಛೇಧಿಸಿಕೊಂಡರೆ 'P' ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
2. ಬಿಂದುಗಳು A(2, 3), B(–2, –3), ಮತ್ತು C(4, –3)ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta$ABC ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಬಾಹು BC ಮತ್ತು ಶೃಂಗ Aನ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳ ಛೇಧನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ $\Delta$ABCಯ ಬಾಹು BCಯು X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇದೆ. ಅದರ ಬಾಹುಗಳು BC, CA ಮತ್ತು ABಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಇಳಿಜಾರನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $a > b$ ಆಗುವಂತೆ ಬಾಹುಗಳು '$a$' ಮತ್ತು '$b$'ಗಳು ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta$ABC ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನದ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆ ಮೂಲಕ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಲಂಬಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ..
5. $2x + 3y - 6 = 0$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

★ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
2. $O(0, 0)$ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು $P(x, y)$ ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $\sqrt{x^2 + y^2}$ .
3. Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_1, y_2)$ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $|y_2 - y_1|$.
4. X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_1, y_2)$ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $|x_2 - x_1|$.
5. ಬಿಂದುಗಳು $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು, $P(x, y)$ ಬಿಂದು $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಳು $\left[\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right]$.
6. $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)$ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
7. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು ಆದರ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ.
8. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಏಕೀಭವಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು G ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. $G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.
9. ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ ಅವು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1 : 2 ಮತ್ತು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
10. $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $(x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2} |x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)|$$

11. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ– 'ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರ '

$$A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)} \qquad \because\ S = \frac{a+b+c}{2}$$

$(a, b, c$ aಗಳು $\Delta ABC$ಯ ಬಾಹುಗಳು)

12. $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯ $y$ ಅಕ್ಷೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರು $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

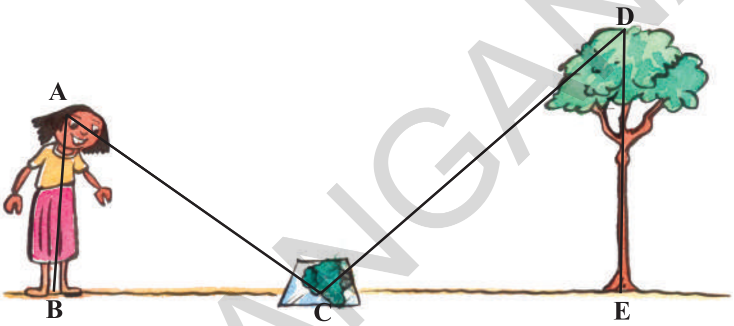
# ಅಧ್ಯಾಯ 8

# ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

## (Similar Triangles)

## 8.1 ಪರಿಚಯ

ಸ್ನಿಗ್ಧಳ ಮನೆಯ ಹಿತ್ತಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎತ್ತರವಾದ ಮರ ಇದೆ. ಸ್ನಿಗ್ಧ ಅದರ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳ ಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಳು. ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ಅವಳಿಗೆ ತಿಳಿಯದು. ಇಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಅವಳ ಮಾವ ಮನೆಗೆ ಬಂದರು. ಸ್ನಿಗ್ಧ, ಮಾವನನ್ನು ಆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದಳು.



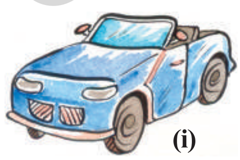

ಅವರು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯ ಯೋಚಿಸಿ, ಅವಳನ್ನು ಒಂದು ಕನ್ನಡಿ ತರಲು ತಿಳಿಸಿದರು. ಅವರು ಆ ಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟರು. ಆಗ ಸ್ನಿಗ್ಧಳನ್ನು ಕನ್ನಡಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆ ಯಾವ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಮರದ ಮೇಲಿನ (ತುದಿಯ) ಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಬಲ್ಲಳೋ ಅಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲುವಂತೆ ಹೇಳಿದರು.

ನಾವು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಬಾಲಕಿ (AB) ಯಿಂದ ಕನ್ನಡಿ (C) ಮತ್ತು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ ಮರ (DE) ಗೆ, ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ABC ಮತ್ತು DEC ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಅವು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳೇ? ಅಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಆಕಾರಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೂ ಗಾತ್ರಗಳು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆ ಆಕಾರಗಳು ಒಂದೇ ಇದ್ದು ಅಳತೆಗಳು ಒಂದೇ ಇರಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಅವನ್ನು ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ .

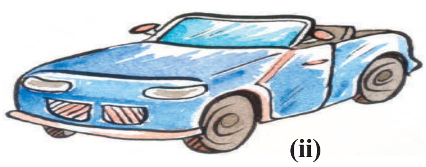
★ ಮರದ ಎತ್ತರ ಅಥವಾ ಬೆಟ್ಟಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ ?

★ ಬಹಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ ಅಂದರೆ ಸೂರ್ಯ ಅಥವಾ ಚಂದ್ರ ? ಇವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಒಂದು ಟೇಪ್‌ನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಳೆಯಬಲ್ಲವೇ? ನಿಜಕ್ಕೆ ನಾವು ಈ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಪರೋಕ್ಷ ಪದ್ದತಿ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರೋಕ್ಷ ಪದ್ದತಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳ ನಿಯಮಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿವೆ.

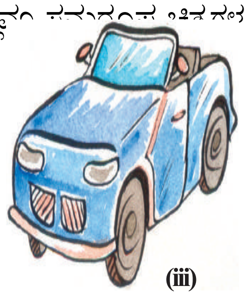
## 8.2 ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು



(i)



(ii)



(iii)

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ (ಕಾರು) ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅದರ ಅಗಲವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ, ಉದ್ದವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಅದು ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕಾಣಿಸುವುದು.

ಅದೇ ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಹಾಗೆ ಇಟ್ಟು, ಅಗಲವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಚಿತ್ರ (iii) ರಂತೆ ಕಾಣಿಸುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಚಿತ್ರ (ii) ಮತ್ತು (iii)ರ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಅವು ಚಿತ್ರ (i)ನ್ನು ಹೋಲುತ್ತಿವೆಯೇ? ಇಲ್ಲ ಚಿತ್ರವು ವಿರೂಪಗೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅವನ್ನು ಸಮರೂಪಗಳೆಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ ? ಇಲ್ಲ, ಅಲ್ಲವೇ? ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಅವು ಸಮರೂಪಗಳು ಅಲ್ಲ.

ಒಬ್ಬ ಫೋಟೋಗ್ರಾಫ್‌ರ್ ಒಂದೇ ಫಿಲ್ಮ್ (ನೆಗಟೀವ್) ನಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಾತ್ರಗಳುಳ್ಳ ಫೋಟೋಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಮುದ್ರಿಸುತ್ತಿರುವನೋ ಆಲೋಚಿಸಿರಿ. ನೀವು ಈ ಫೋಟೋಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಟಾಂಪ್ ಸೈಜ್, ಪಾಸ್‌ಪೋರ್ಟ್ ಸೈಜ್, ಕಾರ್ಡ್ ಸೈಜ್ ಫೋಟೋಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಳೀಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ. ಅವನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಫೋಟೋವನ್ನು 35 ಮೀ.ಮೀ. ಗಾತ್ರದ ಚಿಕ್ಕ ಫಿಲ್ಮ್ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ನಂತರ ಅದನ್ನು 45ಮಿ.ಮೀ (ಇಲ್ಲವೇ 55ಮಿ.ಮೀ) ಗೆ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಆ ಚಿಕ್ಕ ಫೋಟೋಗ್ರಾಫ್‌ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ರೇಖಾ ಖಂಡವು 35 : 45 (ಇಲ್ಲವೇ 35 : 55). ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನೂ, ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಾತ್ರಗಳುಳ್ಳ ಈ ಫೋಟೋಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈ ಫೋಟೋಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು.

(i) (ii) (iii)

ಅದೇ ರೀತಿ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಾಗಿ ಇರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಸಮಾನಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಸ್ಕೇಲ್ ಇಲ್ಲವೆ ಸೂಚೀ ಭಿನ್ನ(representative factor). ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭವನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಸೂಚೀಭಿನ್ನ (scale) ಗೆ ಎಳೆಯುವರು. ಇದನ್ನು ನಾವು ಬ್ಲೂಪ್ರಿಂಟ್ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಸ್ಕೇಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಎಲ್ಲಾ ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮರೂಪಗಳೇ .ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು., ಎಲ್ಲಾ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು. ಇತ್ಯಾದಿ

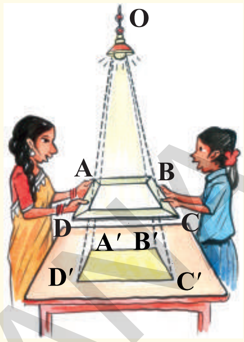
ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು, ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು ಅಲ್ಲ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳಿಗೂ ಆಕಾರ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಸಮರೂಪಗಳು.

ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳೆಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು, ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ

ಸಮರೂಪ ಚೌಕಗಳು    ಸಮರೂಪ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು    ಸಮರೂಪ ವೃತ್ತಗಳು

ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮತಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ**




ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಗೆ ಬಿಗಿಸಿದ ಬಲ್ಬಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಮೇಜನ್ನು ಇಡಿರಿ. ಒಂದು ಸಮತಲವಾಗಿರುವ ರಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ (ABCD ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)ಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ, ಅದನ್ನು ನೆಲಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ, ಬಲ್ಬ್ ಮತ್ತು ಮೇಜಿನ ಮಧ್ಯೆ ಬರುವಂತೆ ತೂಗುಹಾಕಿರಿ. ಆಗ ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಚುತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ನೆರಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆ ನೆರಳಿನ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಆ ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ $A'B'C'D'$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ.

ಈ ಚುತುರ್ಭುಜ $A'B'C'D'$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜ ಮೂಲ ಚತುರ್ಭುಜ ABCDಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಬೆಳಕು ನೇರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ಗುಣದಿಂದಾಗಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಬಲ್ಬ್ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 'O' ಎಂದುಕೊಂಡರೆ $\overrightarrow{OA}$ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $A'$ ಇದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $\overrightarrow{OB}$ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $B'$ ಇದೆ. $\overrightarrow{OC}$ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $C'$ ಇದೆ, $\overrightarrow{OD}$ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $D'$ ಇದೆ. ABCD ಮತ್ತು $A'B'C'D'$ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದ ಚಿತ್ರಗಳು.

$A'$ ಎನ್ನುವುದು ಶೃಂಗ A ಗೆ ಅನುರೂಪ. ಇದನ್ನು ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಯಲ್ಲಿ $A' \leftrightarrow A$.ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ ಮತ್ತು $D' \leftrightarrow D$

ನಿಜವಾಗಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳೆದು,ನಾವು

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ ಮತ್ತು

(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$ ಎಂದು ನಿರ್ಧಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ, ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಆಗಬೇಕಾದರೆ–

(i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

(ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತ (ಸಮಾನುಪಾತ)ದಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂದು ಧೃಢವಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಚೌಕವು, ಆಯತಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವೇ? ಆ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೂ, ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಸಮರೂಪಗಳು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಎರಡು ಬಹುಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ನಿಯಮವಿದ್ದರೆ ಸಾಲದು, ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳೂ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಸರಿಹೋಗಬೇಕು.

**ಯೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

ಒಂದು ಚೌಕ ಮತ್ತು ರಾಂಬಸ್‌ಗಳು ಸಮರೂಪಿAಗಳೇ ಎಂದು ಹೇಳಬಲ್ಲೆಯೇ ? ನಿನ್ನ ಗೆಳೆಯರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ. ಯಾವುದು ಎರಡು ಆಯತಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳೆ ?

**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

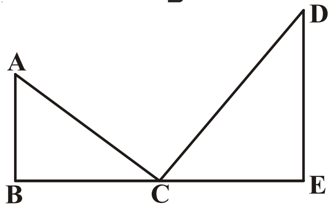
1. ಕೆಳಗಿನ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಸಮರೂಪಗಳು / ಸಮರೂಪಗಳಲ್ಲಗಳಿಂದ ಭರ್ತಿಮಾಡಿ.
   (i) ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ........................
   (ii) ಎಲ್ಲಾ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ........................
   (iii) ಎಲ್ಲಾ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ........................
   (iv) ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪಕೋನಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ........................
   (v) ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದ ಇಲ್ಲವೇ ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಿದ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಫೋಟೋಗ್ರಾಫ್‌ಗಳು ........................
   (vi) ರಾಂಬಸ್ ಮತ್ತು ಚೌಕಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ........................
2. ಕೆಳಗಿನ ವಾಕ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವೋ ಅಸತ್ಯವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.
   (i) ಎರಡು ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು.
   (ii) ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು.
   (iii) ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಸಮರೂಪಗಳು
3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.
   (i) ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು (ii) ಸಮರೂಪಗಳಲ್ಲದ ಚಿತ್ರಗಳು

## 8.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ :

ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿವೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಆಗಬೇಕಾದರೆ,

(i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

(ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.




$\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta DEC$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle DCE$

ಮತ್ತು $\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} = K$ (ಸ್ಕೇಲ್ ಗುಣಕ)

ಆಗ $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta DEC$ ಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಆಗುವವು.

ಇದನ್ನು ಚಿಹ್ನೆಯಲ್ಲಿ $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

('~' ಗುರ್ತನ್ನು ನಾವು 'ಸಮರೂಪ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ)

K ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಕೇಲ್ ಗುಣಕ ವಾದ್ದರಿಂದ

$K > 1$ ಆದರೆ, ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿದ ಚಿತ್ರಗಳು.

$K = 1$ ಆದರೆ, ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು.

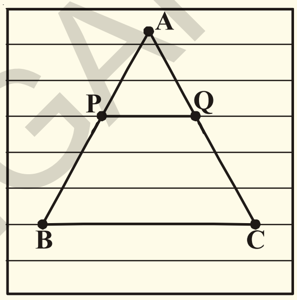
$K < 1$ ಆದರೆ, ಚಿಕ್ಕದು ಮಾಡಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ABC ಮತ್ತು DEC ಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಎರಡು ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವಾದರೂ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಸಾಧನೆಗೆ ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಅಗತ್ಯ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.


ಈ ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಇಲ್ಲವೆ ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ**

ಒಂದು ಗೆರೆಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ಪಾದವು ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯು ಅನೇಕ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತಾಕುತ್ತಾ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಅದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು P, Q ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ.




$\frac{AP}{PB}$, $\frac{AQ}{QC}$ ಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ? ಆ ಅನುಪಾತವು ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ ಏಕೆ? ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವೇ? ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ವಿವಿಧ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಒಂದು ಗೆರೆಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದದ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಪ್ರತಿ ಸಾರಿಯೂ ಆ ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $PQ \parallel BC$ ಆದರೆ $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

ಇದೇ ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಫಲಿತ.

## 8.3.1 ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ (ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

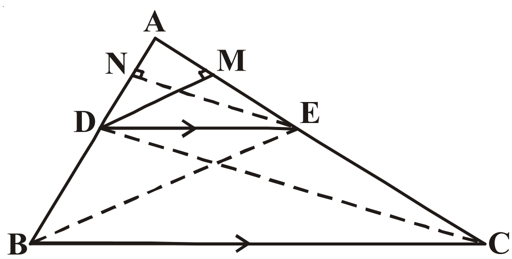
**ಪ್ರಮೇಯ - 8.1 :** ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

**ದತ್ತ :** $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $DE \parallel BC$, DE ರೇಖೆಯು AB, AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಬಳಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

**ಸಾಧನೀಯ :** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

**ರಚನೆ :** B, E ಮತ್ತು C, D ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಮತ್ತು $DM \perp AC$ ಮತ್ತು $EN \perp AB$ ಎಳೆಯಿರಿ.




**ಸಾಧನೆ :** $\Delta ADE$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

$\Delta BDE$ = ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2} \times BD \times EN$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{(\Delta ADE) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta BDE) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \frac{AD}{BD}$ ...(1)

ಮತ್ತು $\Delta ADE$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

$\Delta CDE$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$\frac{(\Delta ADE) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta CDE) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$ ...(2)

$\Delta BDE$ ಮತ್ತು $\Delta CDE$ ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DE ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು BC ಮತ್ತು DE ಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

$(\Delta BDE)$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=$ $(\Delta CDE)$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ...(3)

(1) (2) (3) ಗಳಿಂದ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವು ಸಹ ಸತ್ಯವೇ? ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಿಸಲು ಮತ್ತೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ**

ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ XAY ಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಕಿರಣ AX ಮೇಲೆ $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ ಸೆಂ.ಮೀ. ( ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ ) ಇರುವಂತೆ $B_1, B_2, B_3, B_4$ ಮತ್ತ B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಅದೇ ರೀತಿ AY, ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಇರುವಂತೆ $C_1, C_2, C_3, C_4$ ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

$B_1, C_1$ ಮತ್ತು B, C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

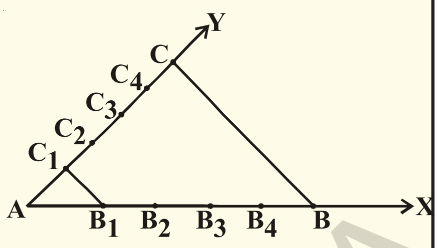
$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $B_1C_1 \parallel BC$.

ಅದೇ ರೀತಿ $B_2C_2$, $B_3C_3$ ಮತ್ತು $B_4C_4$, ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ ಮತ್ತು $B_4C_4 \parallel BC$ ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.




ಇದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯ ಅಂದರೆ ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

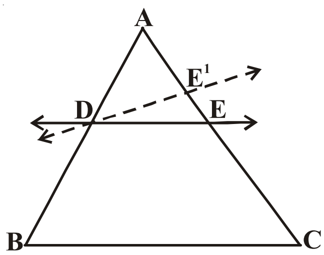
**ಪ್ರಮೇಯ -8.2 :** ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

**ದತ್ತ** : $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಇರುವಂತೆ ಎಳೆದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆ DE

**ಸಾಧನೀಯ** : $DE \parallel BC$

**ಸಾಧನೆ** : DE ಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ $DE^1$ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.




ಆಗ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ಏಕೆ ?)

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ಏಕೆ ?)

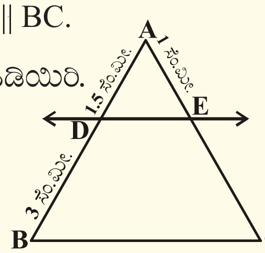
ಎರಡೂ ಕಡೆ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, E ಮತ್ತು $E'$ ಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ವಿಲೀನವಾಗಬೇಕು ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ ?)

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.**

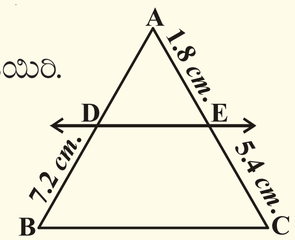
1. $\Delta PQR$ನಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳು PQ ಮತ್ತು PR ಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $EF \parallel QR$ ಹೌದೋ, ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿ.
   (i) PE = 3.9 ಸೆಂ.ಮೀ.EQ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ.PF = 3.6 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು FR = 2.4 ಸೆಂ.ಮೀ.
   (ii) PE = 4 ಸೆಂ.ಮೀ. QE = 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ., PF = 8 ಸೆಂ.ಮೀ., RF = 9 ಸೆಂ.ಮೀ.
   (iii) PQ = 1.28 ಸೆಂ.ಮೀ.PR = 2.56 ಸೆಂ.ಮೀ.,PE = 1.8 ಸೆಂ.ಮೀ., PF = 3.6 ಸೆಂ.ಮೀ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ DE || BC.

(i) EC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

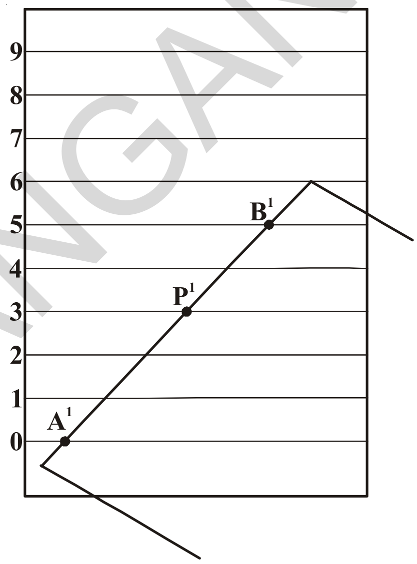



(ii) AD ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




**ರಚನೆ :** ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು (ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ)

ಮಾಧುರಿ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆದಿದ್ದಾಳೆ. ಅದನ್ನು 3 : 2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಳು. ಸ್ಕೇಲ್ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಳೆದು ಅದನ್ನು ಬೇಕಾದ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದಳು. ಇಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಅವಳ ಅಕ್ಕ ಬಂದು, ಆ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಳೆಯದೆಯೇ, ಅದನ್ನು ಬೇಕಾದ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬಲ್ಲೆಯೇ ? ಎಂದು ಕೇಳಿದಳು. ಆದರೆ ಮಾಧುರಿಗೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕೋ ತಿಳಿಯದೆ ಅವಳ ಅಕ್ಕನನ್ನೇ ಹೇಳಬೇಕೆಂದು ಕೇಳಿದಳು. ಆಗ ಅವಳ ಅಕ್ಕ ಹೀಗೆ ಹೇಳಿದಳು. ನೀವು ಸಹ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

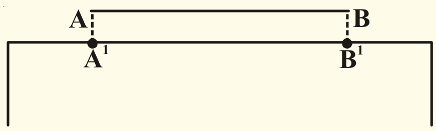



**ಚಟುವಟಿಕೆ**

ಒಂದು ಗೆರೆಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಗೆ '0' ಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2, 3, ... ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಒಂದು ದಪ್ಪನೆಯ ರಟ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡ AB ಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡತೆ ಇಟ್ಟು, ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ತುದಿಗಳನ್ನು ರಟ್ಟಿನ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $A^1$ $B^1$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈಗ $A^1$ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೆರೆಗಳುಳ್ಳ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ '0' ರೇಖೆಯ ಬಳಿ ಇಟ್ಟು ಕಾರ್ಡನ್ನು $A^1$ ನ ಸುತ್ತಲೂ ಭ್ರಮಣ ಮಾಡುತ್ತಾ $B^1$ ಬಿಂದುವು 5 ನೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. (3 + 2).



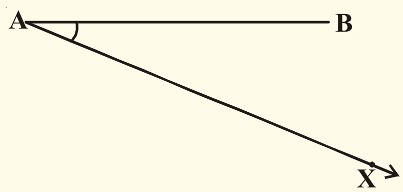

ಆಗ 3 ನೇ ರೇಖೆ ಆ ರಟ್ಟನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೋ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು $P^1$ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

ಮತ್ತೆ ಈ ರಟ್ಟನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡದ ಹಿಂದೆ $A^1$ ಮತ್ತು A, $B^1$ ಮತ್ತು B ಗಳು ಏಕೀಭವಿಸುವಂತೆ ಇಟ್ಟು $P^1$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಂದು 'P'. ಇದು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 3:2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು.

ಈಗ ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೋ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ.

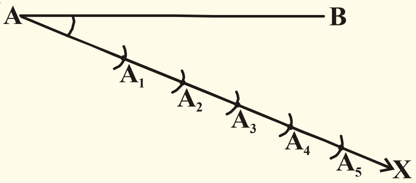
AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದನ್ನು m : n ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು. (m, n ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) m = 3 ಮತ್ತು n = 2.

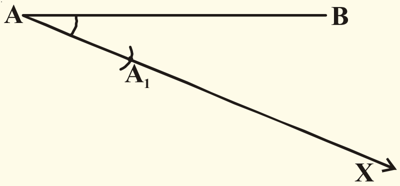



**ಹಂತಗಳು :**

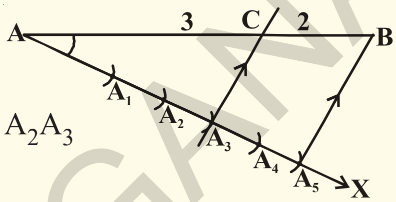
1. AB ರೇಖಾಖಂಡದೊಂದಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಇರುವಂತೆ ಕಿರಣ AX ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

2. 'A' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ, AX ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಳತೆಯಿಂದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕಿರಣ ಮತ್ತು ಕಂಸವು ಛೇದಿಸಿದ ಬಿಂದು $A_1$.




3. $A_1$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಅದೇ ಅಳತೆಯಿಂದ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕಿರಣ ಮತ್ತು ಕಂಸ ಛೇದಿಸಿದ ಬಿಂದು $A_2$.

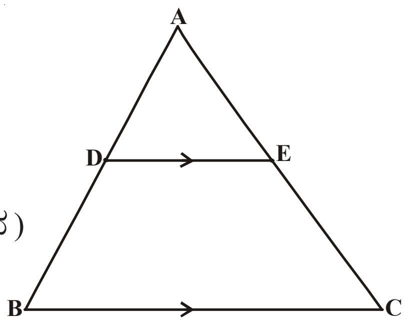



4. ಈ ವಿಧವಾಗಿ 5 ಬಿಂದುಗಳು ($5 = m + n = 3 + 2$) ಆ 5 ಬಿಂದುಗಳು $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ ಮತ್ತು ಇವು $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ಆಗುವಂತೆ ಇರುತ್ತವೆ.

5. $A_5$, B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ $A_3$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ (m = 3 ಆದ್ದರಿಂದ) $A_5B$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ($\angle A\,A_5\,B$ ಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ) ದು AB ನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಮತ್ತು AC : CB = 3 : 2.

ಈಗ ನಾವು ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಲೋಮಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** $\Delta ABC$ನಲ್ಲಿ, DE || BC ಮತ್ತು $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$. ಮತ್ತು AC = 5.6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ AE ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?




**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC$ನಲ್ಲಿ, DE || BC

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ)

ಆದರೆ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

AC = 5.6 ಮತ್ತು AE : EC = 3 : 5.

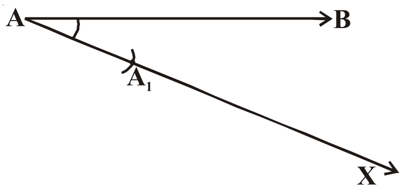
$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{5.6 - AE} \quad \frac{3}{5}$$ (ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿದಾಗ)

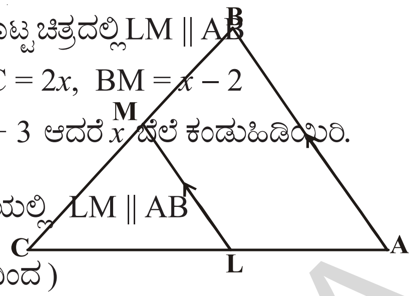
$5AE = (3 \times 5.6) - 3AE$

$8AE = 16.8$

$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.




**ಉದಾಹರಣೆ -2.** ಕೊಟ್ಟ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ LM || AB
AL = $x$ – 3, AC = 2$x$, BM = $x$ – 2
ಮತ್ತು BC = 2$x$ + 3 ಆದರೆ $x$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




**ಪರಿಹಾರ :** ΔABC ಯಲ್ಲಿ LM || AB

$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC} \text{ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ )}$$

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\frac{x-3}{x+3} \qquad \frac{x-2}{x+5} \text{ (ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿದಾಗ )}$$

$$(x-3)(x+5) = (x-2)(x+3)$$

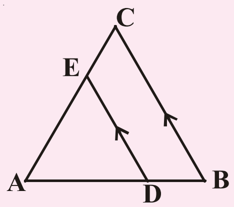
$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

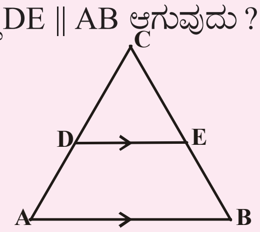
$$\Rightarrow \quad 2x - x = -6 + 15$$

$$x = 9$$

## ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $x$ ನ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ΔABCನಲ್ಲಿ DE || AB ಆಗುವುದು ?
   AD = 8$x$ + 9, CD = $x$ + 3
   BE = 3$x$ + 4, CE = $x$.
2. ΔABCನಲ್ಲಿ DE || BC. AD = $x$, DB = $x$ – 2,
   AE = $x$ + 2 ಮತ್ತು EC = $x$ – 1 ಆದರೆ
   $x$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




**ಉದಾಹರಣೆ -3.** ಒಂದು ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳು 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಆದರೆ ಅದು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

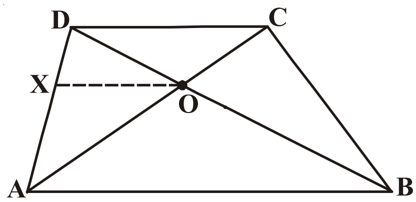
**ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ** :ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

**ಸಾಧನೀಯ** : ABCD ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ.

**ರಚನೆ** : 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು DA ಯನ್ನು X ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

**ಸಾಧನೆ** : ΔDABನಲ್ಲಿ XO || AB (ರಚನೆಯಿಂದ )

$$\Rightarrow \frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB} \qquad \text{(ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ )}$$




$$\frac{AX}{XD} = \frac{BO}{OD} \quad \text{..... (1)}$$

ಮತ್ತೆ $$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad \text{(ದತ್ತ )}$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD} \quad \text{..... (2)}$$

(1) ,(2) ರಿಂದ

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{CO}$$

$\Delta ADC$ನಲ್ಲಿ, $\frac{AX}{XD} = \frac{AO}{OC}$ ಆಗುವಂತೆ XO ರೇಖೆ ಇದೆ.

$\Rightarrow$ XO || DC (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದಿಂದ)

$\Rightarrow$ AB || DC

ABCDಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, AB || DC

$\Rightarrow$ ABCD ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ (ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

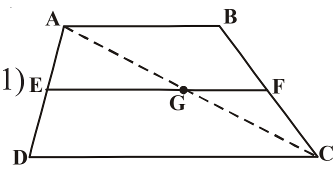
**ಉದಾಹರಣೆ -4.** ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCDಯಲ್ಲಿ, AB || DC. E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ EF || AB ಆಗುವಂತೆ ಸಮಾಂತರಗಳಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳು AD ,BC ಗಳ ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಆದರೆ $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** A, Cಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡವು EF ನ್ನು G ಬಳಿ ಛೇದಿಸಿದೆ.

AB || DC ಮತ್ತು EF || AB (ದತ್ತ)

$\Rightarrow$ EF || DC (ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು)

$\Delta ADC$ನಲ್ಲಿ, EG || DC



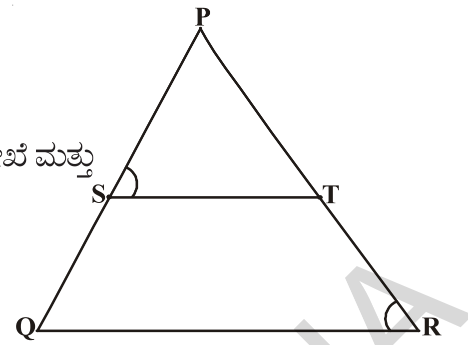

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ) ..(1)

ಅದೇ ರೀತಿ, $\Delta CAB$ನಲ್ಲಿ, GF || AB

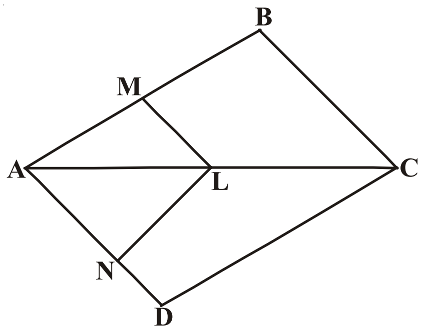
$\frac{CG}{GA} = \frac{CF}{FB}$ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ) ಎಂದರೆ., $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ...(2)

(1) , (2) ರಿಂದ $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$.

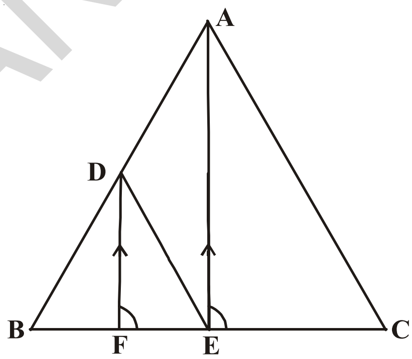
## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.1




1. $\Delta PQR$ನಲ್ಲಿ, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ಆಗುವಂತೆ ST ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಹಾಗೆಯೇ $\angle PST = \angle PRQ$ . ಆದರೆ $\Delta PQR$ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.



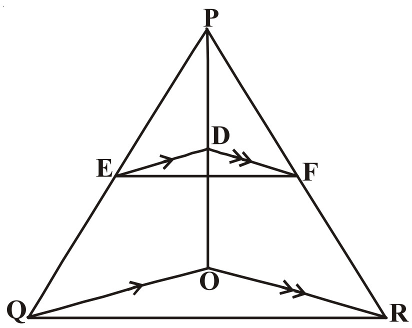

2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $LM \parallel CB$ ಮತ್ತು $LN \parallel CD$ ಆದರೆ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



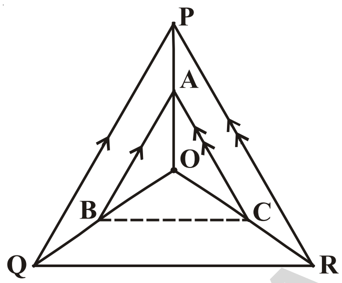

3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $DE \parallel AC$ ಮತ್ತು $DF \parallel AE$ ಆದರೆ $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯು, ಎರಡನೆ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನುಉಪಯೋಗಿಸಿ)

5. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)




6. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $DE \parallel OQ$ ಮತ್ತು $DF \parallel OR$ ಆದರೆ $EF \parallel QR$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.




7. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A, B ,C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ OP, OQ ಮತ್ತು OR ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. AB || PQ ಮತ್ತು AC||PR.

ಆದರೆ BC || QR ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ AB||DC. ಆದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. 7.2 ಸೆಂ.ಮೀ ಉದ್ದದ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು 5 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿರಿ, ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ ಎನ್ನುವುದು ಉಳಿದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗಿಂತ ಯಾವ ರೀತಿ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.

## 8.4 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳು

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಕೆಲವು ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

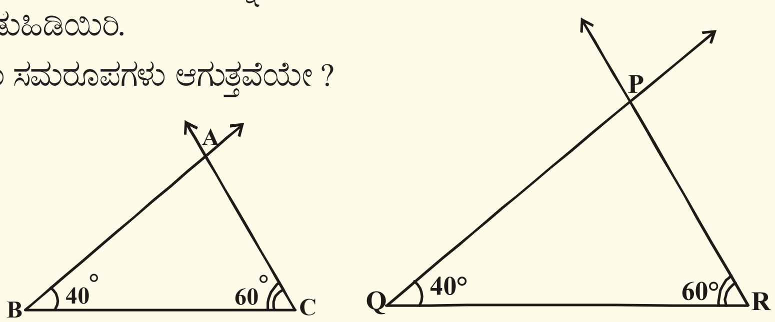
**ಚಟುವಟಿಕೆ**

ಒಂದು ಕೋನಮಾಪಕ ಮತ್ತು ಸ್ಕೇಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳು 40° ಮತ್ತು 60° ಇರಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರನೆಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಅದು 80° ಇರುತ್ತದೆ (ಏಕೆ?)

ಈಗ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಯೇ ?



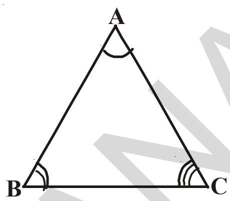

ಈ ಚಟುವಟಿಕೆ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

## 8.4.1 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ.ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ :

**ಪ್ರಮೇಯ -8.3 :** ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ . ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

**ದತ್ತ** : ABC ಯಲಿ ಮತ್ತು DEF ಗಳಲ್ಲಿ

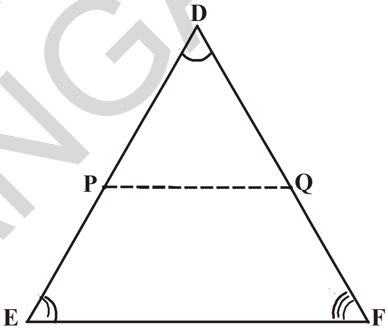
$\angle A = \angle D$ , $\angle B = \angle E$ , $\angle C = \angle F$




**ಸಾಧನೀಯ :** $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

**ರಚನೆ :** AB = DP ಮತ್ತು AC = DQ ಆಗುವಂತೆ DE ಮತ್ತು DF ಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, PQ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

**ಸಾಧನೆ :** $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಏಕೆ?)




ಇದರಿಂದ $\angle B = \angle P = \angle E$ ಮತ್ತು PQ || EF (ಹೇಗೆ ?)

$\therefore \frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ಏಕೆ ?)

ಅದೇ ರೀತಿ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಸೂಚನೆ :** ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಪ್ರಕಾರ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಮೂರನೆ ಕೋನಗಳು ಸಹ ಸಮಾನವಾಗುತ್ತವೆ.

ಇದರಿಂದ ಕೋ.ಕೋ.ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು?

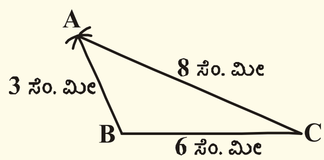
ಮತ್ತೆ ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವು ಏನು?

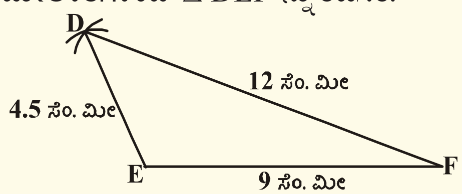
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ. ಎನ್ನುವುದು ಸರಿಯೇ?

ಇದನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ**

AB = 3 ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ., CA = 8 ಸೆಂ.ಮೀ ಅಳತೆಯಿಂದ Δ ABC ಯನ್ನು DE=4.5ಸೆಂ.ಮೀ, EF=9 ಸೆಂ.ಮೀ, FD=12 ಸೆಂ.ಮೀಅಳತೆಗಳಿಂದ Δ DEF ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{2}{3}$.

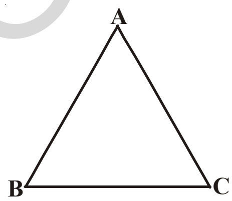
ಈಗ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೋನಮಾಪಕದಿಂದ ಅಳೆದರೆ, ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ? ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ನೀವು ಏನು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಿ? ಅವು ಸಮಾನಗಳು ಅಲ್ಲವೇ, ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು, ವಿವಿಧ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಈ ಫಲಿತವನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

### 8.4.2. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ.ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ :

**ಪ್ರಮೇಯ -8.4 :** ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ, ಹಾಗೆಯೇ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

**ದತ್ತ :** $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ $(<1)$ ಆಗುವಂತೆ

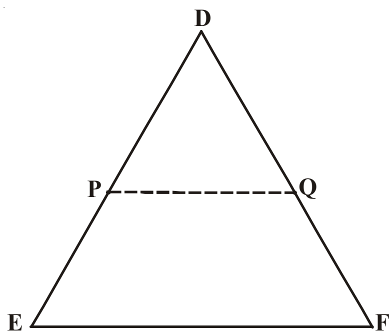



$\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta DEF$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

**ಸಾಧನೀಯ :** $\angle A = \angle D$ , $\angle B = \angle E$ , $\angle C = \angle F$

**ರಚನೆ :** $AB = DP$ ಮತ್ತು $AC = DQ$ ಆಗುವಂತೆ $DE$ , $DF$ ಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. P, Q ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ :** $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ ಮತ್ತು $PQ \parallel EF$ (ಏಕೆ?)




ಆದ್ದರಿಂದ $\angle P = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle Q = \angle F$ (ಏಕೆ?)

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

ಆದರೆ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ಏಕೆ?)

ಆದರೆ $BC = PQ$ (ಏಕೆ?)

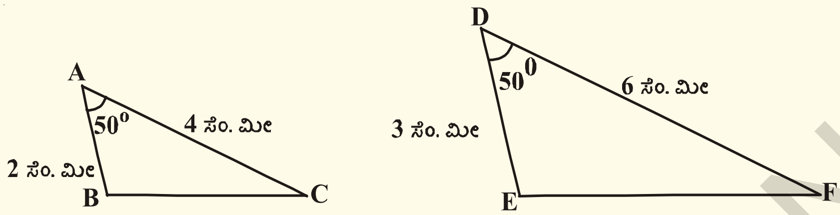
$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A = \angle D$ , $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ (ಹೇಗೆ ?)

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಸರಿ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನಾವು ಓದಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳು ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಇದ್ದಂತೆ. ಈಗ ನಾವು ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ**

AB= 2 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 50^0$ , AC = 4ಸೆಂ.ಮೀ.ಇರುವಂತೆ $\Delta$ ABC ನ್ನು DE = 3 ಸೆಂ.ಮೀ, $\angle D = 50^0$ , DF = 6ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $\Delta$ DEF ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.




$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\angle A = \angle D = 50^0$ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಈಗ $\angle B$ , $\angle C$ , $\angle E$ , $\angle F$ ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು BC , EF ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

$\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ ಹಾಗೂ $\frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವೃತಗೊಳಿಸಿ ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಬರುತ್ತದೆ.

### 8.4.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರೂಪತೆಗೆ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ :

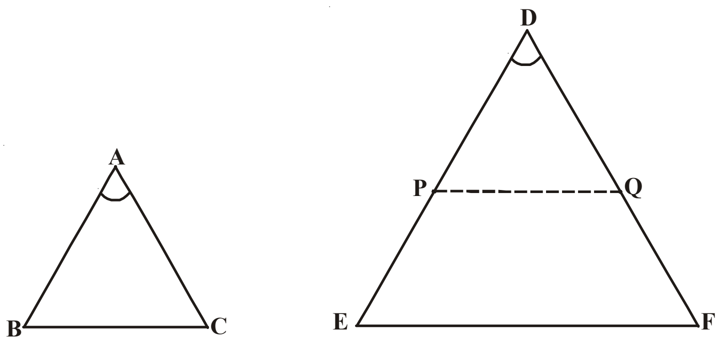
**ಪ್ರಮೇಯ - 8.5 :** ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮ ಕೋನೀಯಗಳು ಹಾಗಾಗಿ ಅವು ಸಮರೂಪಿಗಳು.

**ದತ್ತ :** $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta DEF$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ $(< 1)$ ಮತ್ತು

$\angle A = \angle D$

**ಸಾಧನೀಯ :** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

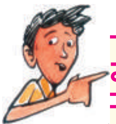



**ರಚನೆ :** AB = DP ಮತ್ತು AC = DQ ಇರುವಂತೆ DE, DF ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ P ,Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. P, Q ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ** : PQ || EF ಮತ್ತು $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಹೇಗೆ ?)

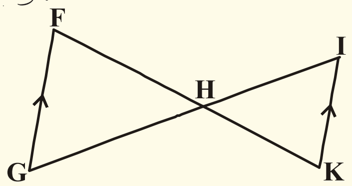
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A = \angle D$ , $\angle B = \angle P$ , $\angle C = \angle Q$

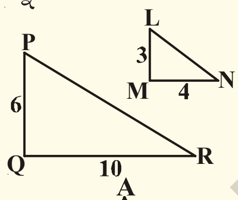
$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ಏಕೆ?)

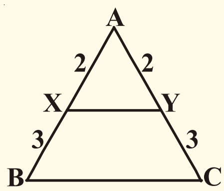


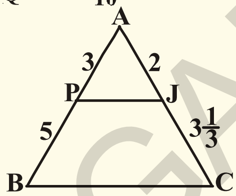
## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

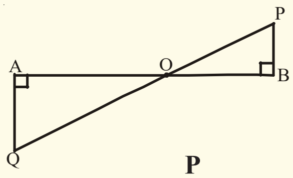
1. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳೇ? ಸಮರೂಪಗಳಾದರೆ ಯಾವ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಆಧಾರವಾಗಿಯೋ ವಿವರಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

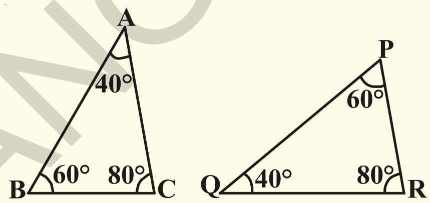
(i)


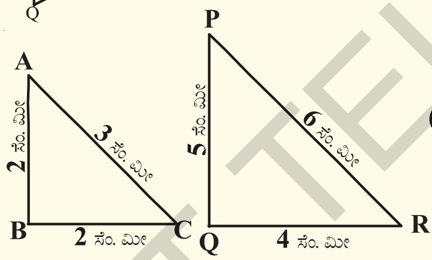

(ii)


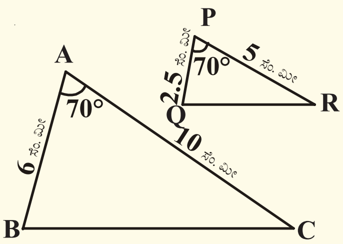

(iii)



(iv)


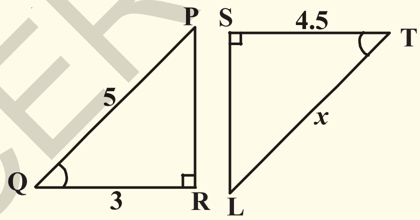

(v)


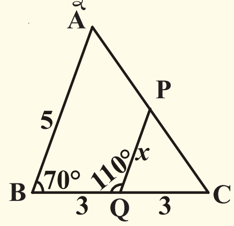

(vi)


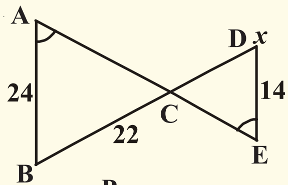

(vii)


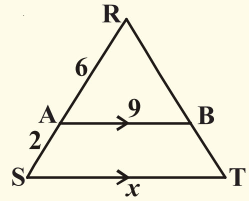

(viii)


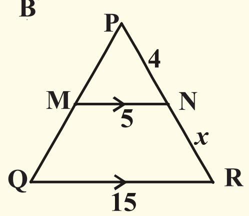

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಏಕೆ ಸಮರೂಪಗಳೋ ವಿವರಿಸಿ, ಆಗ $x$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

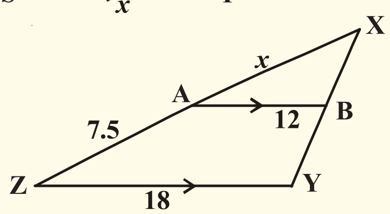
(i)



(ii)


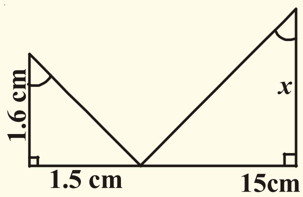

(iii)



(iv)


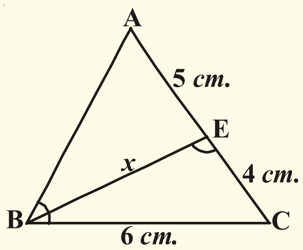

(v)



(vi)


(vii)



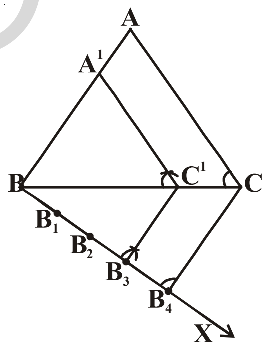

(viii)




**ರಚನೆ** : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸ್ಕೇಲಿನ ಪ್ರಕಾರ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

a) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತಾ, $\Delta ABC$ ಯ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗ ಇರುವಂತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಸೂಚೀ ಭಿನ್ನ $\frac{3}{4}$)

**ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು** : 1.BC ಬಾಹುವಿನೊಂದಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಮಾಡುವಂತೆ A ಶೃಂಗದ ಅಭಿಮುಖ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ BX ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



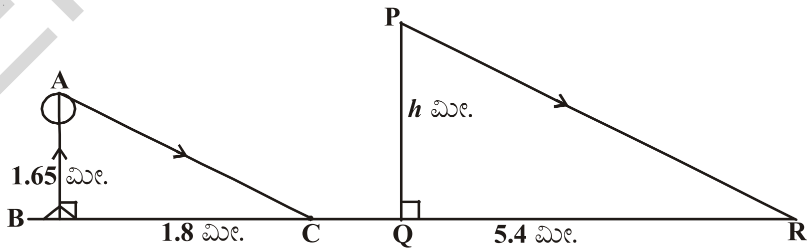

2. ಈ BX ಮೇಲೆ $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ ಆಗುವಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು $B_1$, $B_2$, $B_3$ , $B_4$ ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

3. $B_4C$ ನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. $B_3$ ಮೂಲಕ $B_4C$ ಗೆ ಸಮಾಂತರ ವಾಗಿರುವಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು BC ಯನ್ನು $C'$ ಬಳಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

4. $C'$ ಮೂಲಕ CA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು BA ನ್ನು $A'$ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta A'BC'$ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ.

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** 1.65ಮೀ. ಉದ್ದ ಇರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ 1.8 ಮೀ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪ ಸ್ತಂಭವು 5.4 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ, ಆ ದೀಪ ಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?




**ಸಾಧನೆ :** $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta PQR$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle Q = 90^0$.

$\angle C = \angle R$ ($AC \parallel PR$, ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಾದರೂ ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ( ಕೋ.ಕೋ.ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಪ್ರಕಾರ)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು)

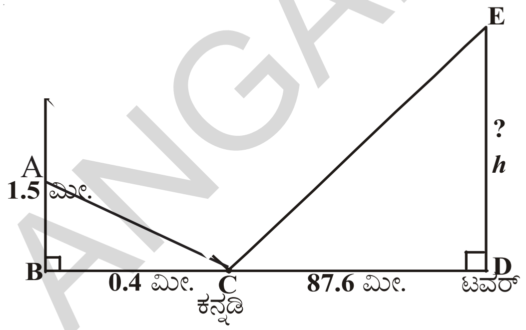
$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95 \text{ ಮೀ.}$$

ಆ ದೀಪ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 4.95 ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** ಒಂದು ಗೋಪುರದಿಂದ 87.6 ಮೀ.ದೂರದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರವನ್ನು ನೋಡಿದನು. ಕನ್ನಡಿಯು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉನ್ನತ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿಡಲಾಗಿದೆ. ಮತ್ತು ಆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ 0.4ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ದೃಷ್ಟಿ ಭೂಮಿಯಿಂದ 1.5ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta EDC$ಗಳಲ್ಲಿ




$\angle ABC = \angle EDC = 90°$

$\angle BCA = \angle DCE$ (ಆಧಿಪಾತಕೋನ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲನ ಕೋನಗಳು ಸಮ)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (ಕೋ.ಕೋ.ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

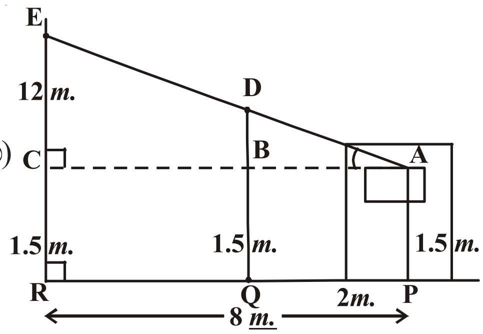
$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 328.5 ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ -7.** ಗೋಪಾಲನು ತನ್ನ ಮನೆಯ ಹಾಲ್ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಪಾರ್ಟ್‌ಮೆಂಟಿನ ಮೇಲಿನ ಅಂತಸ್ತಿನ ಕಿಟಕಿ ಹತ್ತಿರ ನಿಂತುಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಯಾವಗಲೂ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಚಿಂತಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರಿಗೆ ಕಾಣದಂತೆ ಇರಲು ತನ್ನ ಮನೆಯ ಪ್ರಹರಿ ಗೋಡೆ (ಕೌಂಪೌಂಡ್ ಗೋಡೆ) ಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಬೆಳೆಸಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡನು. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಗೋಡೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದವರೆಗೆ ಕಟ್ಟಬೇಕು?

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABD$ ಮತ್ತು $\Delta ACE$ಗಳಲ್ಲಿ




$\angle B = \angle C = 90°$

$\angle A = \angle A$ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

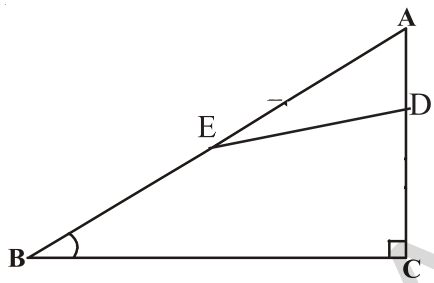
$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (ಕೋ.ಕೋ. ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{12}$$

$$BD = \frac{2 \times 12}{8} = \frac{2.4}{8} = 3 \text{ ಮೀ.}$$

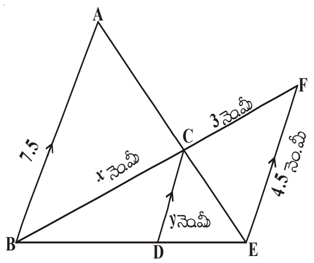
ಪ್ರಹರಿ ಗೋಡೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಎತ್ತರ = 1.5 ಮೀ.. + 3 ಮೀ. = 4.5ಮೀ. ಎತ್ತರ ಪ್ರಹಾರಿಗೋಡೆ ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಹಾಲು ಪಕ್ಕದ ಮನೆಯವರಿಗೆ ಕಾಣಿಸದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.2




1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle ADE = \angle B$
   (i) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
   (ii) AD = 3.8 ಸೆಂ.ಮೀ., AE = 3.6 ಸೆಂ.ಮೀ. BE = 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ. BC = 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ DE ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

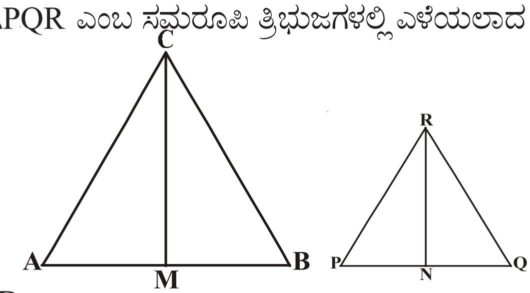
2. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮೊದಲನೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಎರಡನೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.




3. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $AB \parallel CD \parallel EF$.
   AB = 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. DC = y ಸೆಂ.ಮೀ.
   EF = 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. BC = $x$ ಸೆಂ.ಮೀ.
   ಆದರೆ $x$ , $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

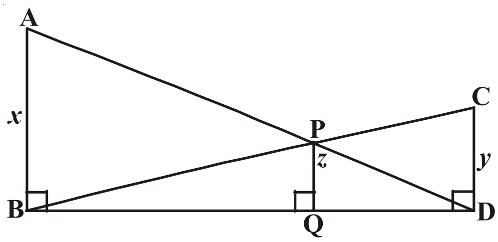
4. 90 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕಿಯು ದೀಪಸ್ತಂಭದಿಂದ ದೂರವಾಗಿ 1.2 ಮೀ/ಸೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ದೀಪ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 3.6ಮೀ. ಆದರೆ 4 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ನಂತರ ಏರ್ಪಡುವ ಆ ಬಾಲಕಿಯ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. CM ಮತ್ತು RN ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta PQR$ ಎಂಬ ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲಾದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು. ಆದರೆ
   (i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$
   (ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$
   (iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.




6. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಯಲ್ಲಿ $AB \parallel DC$ . AC ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣಗಳು 'O' ಬಳಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. AB, CD, PQ ಗಳು BD ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು.
   AB = x, CD = y ಮತ್ತು PQ = Z ಆದರೆ
   $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ . ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



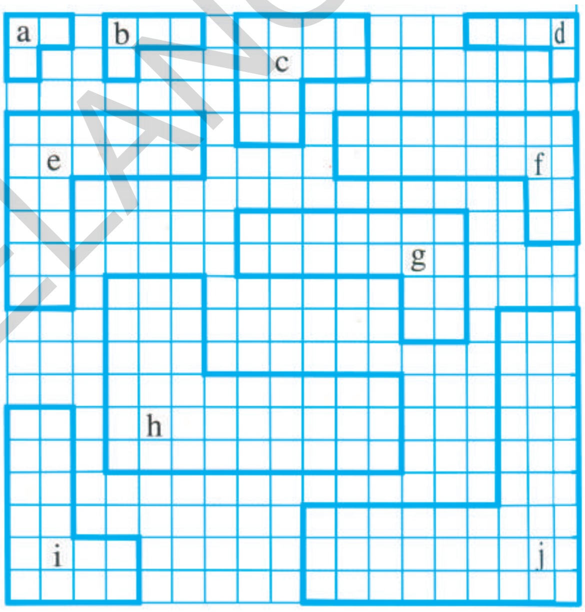

8. 4ಮೀ. ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಒಂದು ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭವು 6 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡವು 24ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ, ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

9. $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta FEG$ ಗಳಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು FE ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ D ಮತ್ತು H ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle ACB$ ಮತ್ತು $\angle EGF$ ಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ CD ಮತ್ತು GH ಗಳು ಹಾಗೆಯೇ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ ಆದರೆ
   (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$
   ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
10. $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta DEF$ ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು AX ಮತ್ತು DY ಆದರೆ $AX : DY = AB : DE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
11. $\Delta ABC$ಯನ್ನು ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತಾ, ಅದರ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ $\frac{5}{3}$ ರಷ್ಟು ಇರುವ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.
12. 4ಸೆಂ.ಮೀ., 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತಾ, ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ $\frac{2}{3}$ ರಷ್ಟು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ.
13. ಪಾದವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ $1\frac{1}{2}$ ರಷ್ಟು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳುಳ್ಳ ಮತ್ತೊಂದು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

## 8.5 ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ. ಆದರೆ ಈ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ಇದೆಯೆಂದು ನೀನು ಭಾವಿಸುತ್ತಿರುವಿರೇ ? ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ.**




ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿ.

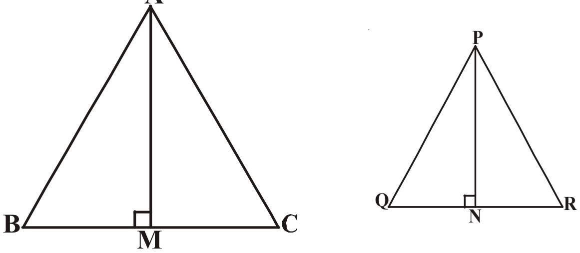
ಅವುಗಳ

(i) ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು

(ii) ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ವರ್ಗವೆಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ನಾವು ಈಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.




**ಪ್ರಮೇಯ -8.6 :** ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

**ದತ್ತ :** $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

**ಸಾಧನೀಯು :** $\frac{(\Delta ABC) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$.

**ರಚನೆ :** $AM \perp BC$ ಮತ್ತು $PN \perp QR$ ಎಳೆಯಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ :** $\frac{(\Delta ABC) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN}$ ...(1)

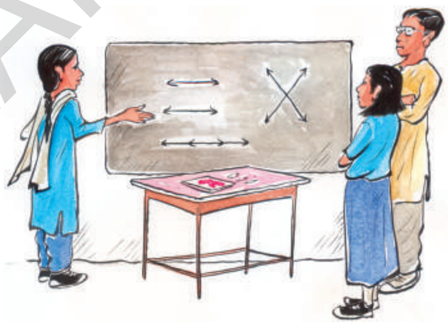
$\Delta ABM$ ಮತ್ತು $\Delta PQN$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle Q \; (\because \Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$\angle M = \angle N = 90^0$

$\therefore \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (ಕೋ.ಕೋ. ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ ...(2)



ಇನ್ನು $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ದತ್ತ)

$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}} = \frac{AC}{PR}$ ...(3)

$\therefore \frac{(\Delta ABC) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ}$ (1), (2) ಮತ್ತು (3) ಗಳಿಂದ

$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$.

ಸಮೀಕರಣ (3)ರಿಂದ

$$\frac{(\Delta ABC) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR) \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

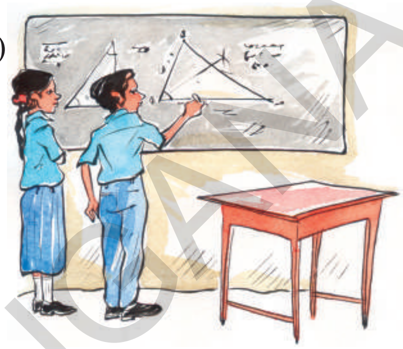
ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -8.** ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{(\Delta ABC)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

ಆದರೆ $\dfrac{(\Delta ABC)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = 1$ ($\because$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ)



$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ $AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$ ದೊರೆಯುವುದು.

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 64 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 121 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು EF = 15.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ BC ನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

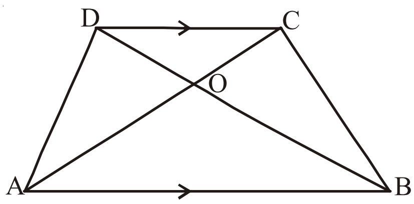
**ಪರಿಹಾರ :** $\dfrac{(\Delta ABC)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(\Delta PQR)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ $AB \parallel DC$, ಹಾಗೆಯೇ ಕರ್ಣಗಳು AC, BDಗಳು 'O' ಬಳಿ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. AB = 2CD, ಆದರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು AOB ಮತ್ತು COD ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD, ನಲ್ಲಿ $AB \parallel DC$ ಮತ್ತು AB = 2CD.




$\Delta AOB$ , $\Delta COD$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle AOB = \angle COD$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

$\angle OAB = \angle OCD$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು )

$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (ಕೋ.ಕೋ.ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

$$\frac{(AOB)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{(COD)\text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ $(\Delta AOB)$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ : $(\Delta COD)$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 4 : 1.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.3

1. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.
2. ಒಂದು ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಆ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಇರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. $\Delta ABC$ ನಲ್ಲಿ, BC, CA, AB ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E, F ಆದರೆ $\Delta DEF$ ಮತ್ತು $\Delta ABC$ ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ XY $\|$ AC ಮತ್ತು XY ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳುಳ್ಳ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $\frac{AX}{XB}$ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಅನುಪಾತದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. BC = 3ಸೆಂ.ಮೀ. EF = 4ಸೆಂ.ಮೀ. $\Delta ABC$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 54 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ $\Delta DEF$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB ಬಾಹುವನ್ನು P ಬಳಿ, AC ನ್ನು Q ಬಳಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ PQ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆದಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ AP = 1 ಸೆಂ.ಮೀ. BP = 3ಸೆಂ.ಮೀ. AQ = 1.5 ಸೆಂ.ಮೀ. CQ = 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ $\Delta APQ$ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{16}$($\Delta ABC$ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
8. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು 81ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 49 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಅನುರೂಪ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

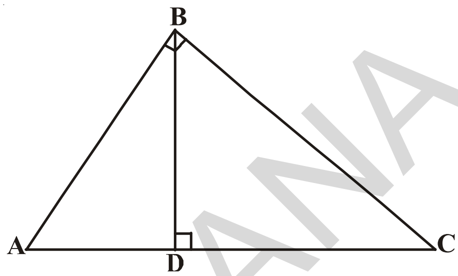
## 8.6 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ನಿಮಗೆ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಬಗ್ಗೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದನ್ನು ನೀವು ಕೆಲವು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಭಾವನೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಆದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

**ಪ್ರಮೇಯ -8.7 :** ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಲಂಬಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳು , ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮ ರೂಪಗಳು ಹಾಗು ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಹ ಸಮರೂಪಗಳು.

**ಸಾಧನೆ:** ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಲಂಬಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಶೃಂಗ B.

B ನಿಂದ AC ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ BD




$\Delta ADB$ ಮತ್ತು $\Delta ABC$ ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle A = \angle A$

ಮತ್ತು $\angle ADB = \angle ABC$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ಹೇಗೆ ?) ...(1)

ಅದೇ ರೀತಿ , $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ಹೇಗೆ ?) ...(2)

(1) , (2) ಗಳಿಂದ BD ಲಂಬಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಗೆ ಸಮರೂಪಗಳು.

ಹಾಗೆಯೇ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

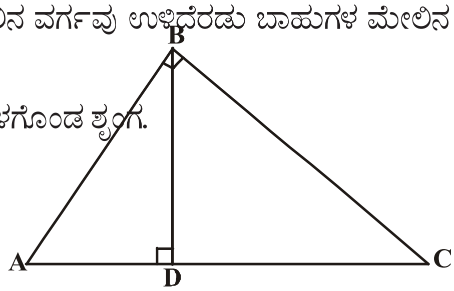
ಇದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ದಾರಿ ಮಾಡಿಕೊಡುವುದು.

**ಯೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದು. ಏಕೆ? ನಿಮ್ಮ ಮಿತ್ರರೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಉಪಾಧ್ಯಾಯರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.

## 8.6.1 ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ ( ಬೌಧಾಯನ ಪ್ರಮೇಯ )

**ಪ್ರಮೇಯ -8.8 :** ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.




**ದತ್ತ :** ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ನಲ್ಲಿ B ಯು ಲಂಬಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಶೃಂಗ.

**ಸಾಧನೀಯ :** $AC^2 = AB^2 + BC^2$

**ರಚನೆ :** $BD \perp AC$. ಎಳೆಯಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ :** $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.)

$AD \, . \, AC = AB^2$ ...(1)

ಅದೇ ರೀತಿ,, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$CD\,.\,AC = BC^2$ ...(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$AD\,.\,AC + CD\,.\,AC = AB^2 + BC^2$

$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC\,.\,AC = AB^2 + BC^2$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಬೋಧಾಯನ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 ) ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಿದ್ದಾನೆ.

"ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಆ ಆಯತದ ಕರ್ಣವು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ." ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಾವು ಬೋಧಾಯನ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೇನು? ಅದನ್ನು ಸಹ ನಾವು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ಸಾಧಿಸೋಣ.

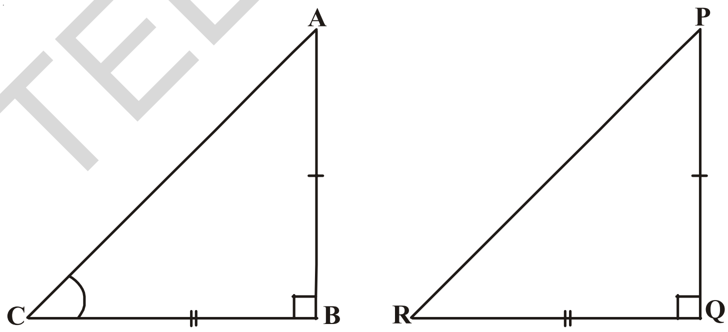
**ಪ್ರಮೇಯ -8.9 :** ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವುದು ಎಂದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

**ದತ್ತ** :$\Delta ABC$, ನಲ್ಲಿ

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

**ಸಾಧನೀಯ :** $\angle B = 90^0$.

**ರಚನೆ :** $PQ = AB$ ಮತ್ತು $QR = BC$ ಇರುವಂತೆ Q ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಇರುವಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta PQR$ ನ್ನು ರಚಿಸಿ.




**ಸಾಧನೆ :** $\Delta PQR$ ನಲ್ಲಿ $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ( $\angle Q = 90^0$ ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (ರಚನೆಯಿಂದ ) ...(1)

ಆದರೆ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (ದತ್ತದಿಂದ ) ...(2)

$\therefore$ $AC = PR$ ( (1) & (2) ಗಳಿಂದ )

ಈಗ $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta PQR$ ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = PQ$ (ರಚನೆ )

$BC = QR$ (ರಚನೆ )

$AC = PR$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತ )

$\therefore\ \angle B = \angle Q$ (ಸರ್ವಸಮತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

ಆದರೆ $\angle Q = 90°$ (ರಚನೆಯಿಂದ )

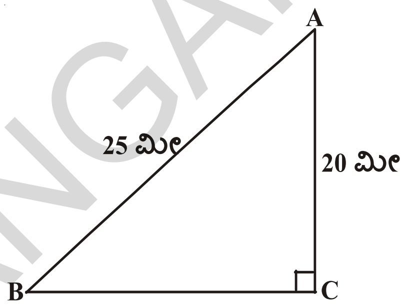
$\therefore\ \angle B = 90°$.

ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -11.** 25ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು, ನೆಲದಿಂದ 20ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿನ ಕಿಟಕಿಗೆ ಆನಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಗೋಡೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ?

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC$ನಲ್ಲಿ $\angle C = 90°$




$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15$ ಮೀ.

ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 15 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಶೃಂಗ A ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಇರುವುದು. BL ಮತ್ತು CM ಗಳು ಇದರಲ್ಲಿನ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು, ಆದರೆ

$4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $\angle A = 90°$

BL ಮತ್ತು CM ಗಳು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು

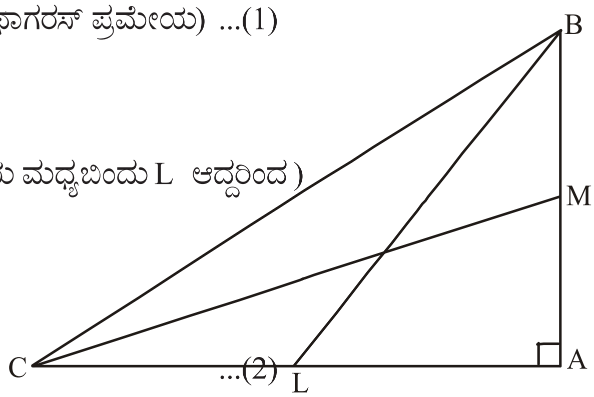
$\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ) ...(1)

$\Delta ABL$ಯಲ್ಲಿ $BL^2 = AL^2 + AB^2$

ಆದರೆ $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು L ಆದ್ದರಿಂದ )

$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

$\therefore\ 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)




$\Delta CMA$ ಯಲ್ಲಿ, $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$ ($\because$ ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆದ್ದರಿಂದ )

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \qquad ...(3)$$

(2) ಮತ್ತು (3) ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

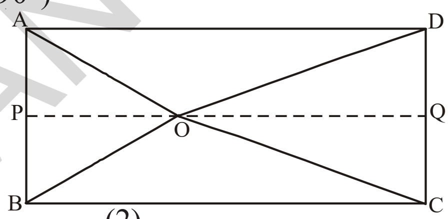
$$\therefore\ 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \quad ((1)\text{ ರಿಂದ}).$$

**ಉದಾಹರಣೆ -13.** ABCD ಆಯತದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 'O' ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದು ಆದರೆ $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** 'O' ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ABನ್ನು P ಬಳಿ, DC ಯನ್ನು Q ಬಳಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಆಗ. PQ || BC

PQ || BC

$\therefore$ $PQ \perp AB$ ಮತ್ತು $PQ \perp DC$ $(\because \angle B = \angle C = 90°)$




ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle BPQ = 90°$ & $\angle CQP = 90°$

$\therefore$ BPQC ಮತ್ತು APQD ಗಳುಎರಡು ಆಯತಗಳು

$\Delta OPB$ ನಿಂದ $OB^2 = BP^2 + OP^2$ ...(1)

ಅದೇ ರೀತಿ $\Delta OQD$ ನಿಂದ $OD^2 = OQ^2 + DQ^2$ ...(2)

$\Delta OQC$ ನಿಂದ $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ ...(3)

$\Delta OAP$ನಿಂದ $OA^2 = AP^2 + OP^2$ ...(4)

(1) ಮತ್ತು (2) ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

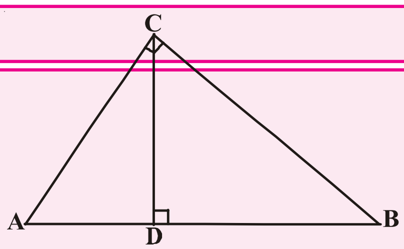
$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \qquad (\because BP = CQ \text{ ಮತ್ತು } DQ = AP)$$

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \ ((3)\ \&\ (4)\text{ ಗಳಿಂದ})$$

## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

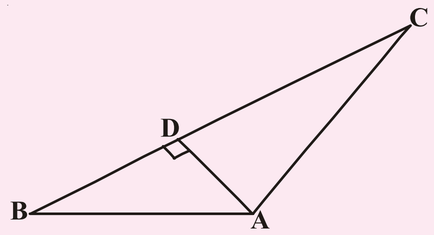



1. $\Delta ACB$ ನಲ್ಲಿ $\angle C = 90^0$, $CD \perp AB$ ಆದರೆ

   $\dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{AD}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

2. 15 ಮೀ. ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಒಂದು ಏಣಿಯು ರಸ್ತೆಯ ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ನೆಲದಿಂದ 9 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ತಾಕುವುದು. ಏಣಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಅದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಟ್ಟು, ಅದನ್ನು ರಸ್ತೆಯ ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿ ಇರುವ ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ನೆಲದಿಂದ 12ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ತಾಕುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ರಸ್ತೆಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AD \perp BC$ ಆದರೆ $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.




**ಉದಾಹರಣೆ -14.** ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣವು, ಅದರ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವಿನ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 6ಮೀ. ಹೆಚ್ಚು, ಮೂರನೇ ಬಾಹುವು ಕರ್ಣಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹುವನ್ನು $x$ಮೀ. ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ ಕರ್ಣ = (2x + 6)ಮೀ. ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹು = (2x + 4)ಮೀ.

ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ ಅಥವಾ $x = -2$

ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುವು ಋಣಬೆಲೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

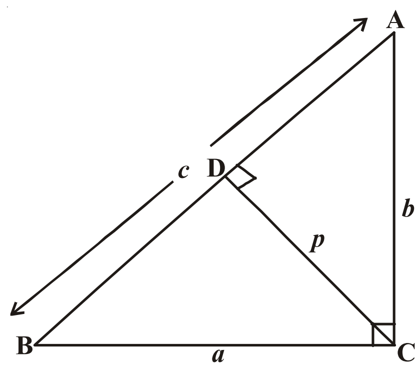
$\therefore x = 10$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು :- 10ಮೀ. 26ಮೀ.ಮತ್ತು 24ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ -15.** ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗ C ಬಳಿ ಇದೆ. BC = a, CA = b, AB = c . ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಶೃಂಗ C ನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದ p ಆದರೆ (i) pc = ab

(ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** (i) $CD \perp AB$ ಮತ್ತು CD = p.




$\Delta ABC$ = ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2} \times AB \times CD$

$= \frac{1}{2} cp$ .

ಅದೇ ರೀತಿ , $\Delta ABC$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2} \times BC \times AC$

$= \frac{1}{2} ab$

$$\frac{1}{2}\text{cp} = \frac{1}{2}\text{ab}$$

$$\text{cp} = \text{ab} \qquad \ldots(1)$$

(ii) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ನಲ್ಲಿ, C ಶೃಂಗದ ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನವಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AB^2 = BC^2 + AC^2$

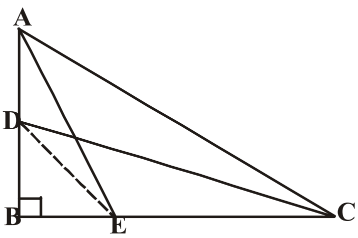
$c^2 = a^2 + b^2$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

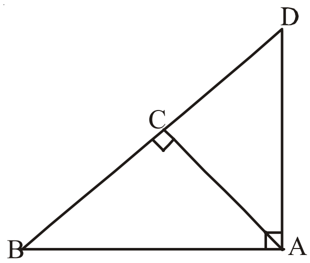
$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.4

1. ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಆದರ ಕರ್ಣಗಳ ವರ್ಗಗಳಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.




2. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ, B ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಿದೆ. D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು BC ಗಳ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದರೆ $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
3. ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಾಹುವಿನ ವರ್ಗದ ಮೂರರಷ್ಟು ಆದೇ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
4. P ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಿರುವ PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $PM \perp QR$ ಆಗುವಂತೆ QR ಮೇಲೆ M ಬಿಂದುವಿದ್ದರೆ, $PM^2 = QM \cdot MR$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.




5. A ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಿರುವ $\Delta ABD$ ಯಲ್ಲಿ, $AC \perp BD$

   ಆದರೆ (i) $AB^2 = BC.BD$.

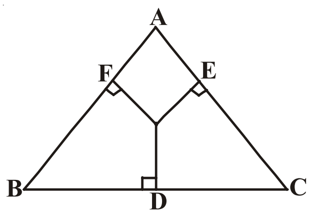
   (ii) $AC^2 = BC.DC$

   (iii) $AD^2 = BD.CD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ನಲ್ಲಿ C ಯು ಲಂಬಕೋನ. ಆದರೆ $AB^2 = 2AC^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
7. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 'O' ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದು.

   $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ ಮತ್ತು $OF \perp AB$,

   (i) $OA^2+OB^2+OC^2-OD^2-OE^2-OF^2 = AF^2+BD^2+CE^2$

   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



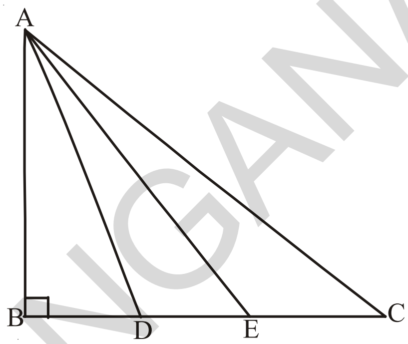
8. 18 ಮೀ. ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಒಂದು ನೇರ ಕಂಬದ ತುದಿಗೆ 24 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಬಿಗಿಯಾಗಿ ಎಳೆದು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಹೊಡೆದ ಒಂದು ಮೊಳೆಗೆ ಕಟ್ಟಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಕಂಬದಿಂದ ಆ ಮೊಳೆಯು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ?

9. 6ಮೀ. ಮತ್ತು 11ಮೀ. ಉದ್ದಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಕಂಬಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲ ನೆಲದ ಮೇಲಿವೆ. ಆ ಎರಡು ಕಂಬಗಳ ಪಾದಗಳ ಮಧ್ಯದೂರ 12 ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ಎರಡು ಕಂಬಗಳ ತುದಿಗಳ ಮಧ್ಯ ದೂರ ಎಷ್ಟು?

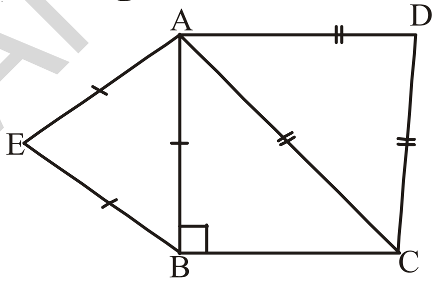
10. ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ನಲ್ಲಿ, BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದು ಇದೆ. ಮತ್ತು $BD = \frac{1}{3}BC$ ಆದರೆ $9AD^2 = 7AB^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\Delta ABC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ. ಶೃಂಗ B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನವಿದೆ. BC ಬಾಹುವನ್ನು D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು ಸಮವಾಗಿ ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವವು.

ಆದರೆ, $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.




12. ಸಮ ದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ನಲ್ಲಿ B ಯು ಲಂಬಕೋನ. AC ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ACD ಮತ್ತು ABE ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ $\Delta ABE$ ಮತ್ತು $\Delta ACD$ ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




## 8.7 ಪ್ರಮೇಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳು :

### 1. ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ :

ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಕೊನೆಗೆ "ಅಲ್ಲ" ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ಹೊಸ ಹೇಳಿಕೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ನಾವು ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ "$\Delta ABC$ ಯು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ". ಎಂಬುವುದು ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಇದನ್ನು ನಾವು "$p$" ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$p$ :ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಆಗ ಅದು ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ "$\Delta ABC$ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಅಲ್ಲ". $p$ ನ ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು $\sim p$;ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಹೇಳಿಕೆ $p$ ಹೇಳಿದ್ದನ್ನು $\sim p$ ನಿಷೇಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ನಾವು ಈ ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದರ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧವಾದ ಗೊಂದಲಕ್ಕೆ ತಾವಿರದಂತೆ ಇರಬೇಕು.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಜಾಗ್ರತ್ತೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$\boldsymbol{p}$ : ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇದರ ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ $\sim p$ ಯನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

i) $\sim p$ : ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಲ್ಲ.

ii) $\sim p$ ಎಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ ಸರಿಯಾದುದೋ ಹೇಗೆ ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ ? ಇದಕ್ಕೆ ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. "$p$ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯಾದರೆ ,$\sim p$ ಅದರ ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆ. $p$ ಯು ಸತ್ಯವಾದರೆ $\sim p$ ಅಸತ್ಯವಾಗುವುದು ಮತ್ತು $p$ ಅಸತ್ಯವಾದರೆ $\sim p$ ಸತ್ಯವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ $s$ : $2+2=4$ ಸತ್ಯ

$\sim s$ : $2+2\neq 4$ ಅಸತ್ಯ

## 2. ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮ (Converse of a statement ):

ಸತ್ಯವಾಗಿರುವ ಇಲ್ಲವೆ ಅಸತ್ಯವಾಗಿರುವ, ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಆಗಿರದೆ, ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಆಗಿರುವ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳ ಹೇಳಿಕೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಎರಡು ಸರಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಸಂಯುಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಸರಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು "ಆದರೆ ಆಗ" ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದರೆ ಬರುವ ಸಂಯುಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಅನುಮಿತಿ ಇಲ್ಲವೇ ಪ್ರತಿಬಂಧಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡು ಸರಳ ಹೇಳಿಕೆಗಳು $p$ ಮತ್ತು $q$ ಗಳನ್ನು "ಆದರೆ ಆಗ" ದಿಂದ ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದರೆ $p$ ಆದರೆ ಆಗ $q$ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು $p\Rightarrow q$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಈ $p\Rightarrow q$ ನಲ್ಲಿ ನಾವು $p$, $q$ ಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ $q\Rightarrow p$ ಬರುವುದು. ಇದನ್ನೇ ನಾವು ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $p\Rightarrow q$ : ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $AB = AC$ ಆದರೆ ಆಗ $\angle C = \angle B$

ವಿಲೋಮ : $q\Rightarrow p$ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ನಲ್ಲಿ $\angle C = \angle B$ ಆದರೆ ಆಗ $AB = AC$

## 3. ನಿಷೇಧತೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಧನೆ

ಈ ನಿಷೇಧತೆಯ ಮೂಲಕ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಹೇಳಿಕೆಯ ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲೊ ಒಂದು ಕಡೆ ನಿಷೇಧವು ಬರುತ್ತದೆ. ಆಗ ನಾವು ನಿಷೇಧ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ ಈ ನಿಷೇಧ ಬಂದಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವೆಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತೇವೆ.

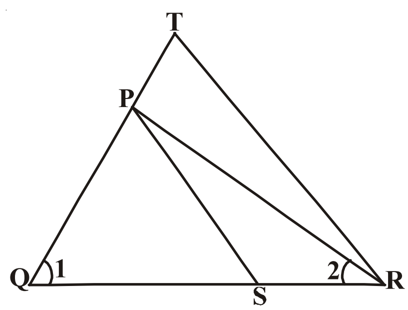
## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

**[ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ್ದು ಅಲ್ಲ]**

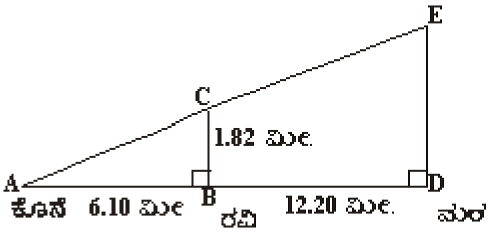
1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ

$\frac{QT}{PR}=\frac{QR}{QS}$ ಮತ್ತು $\angle 1 = \angle 2$ ಆದರೆ

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

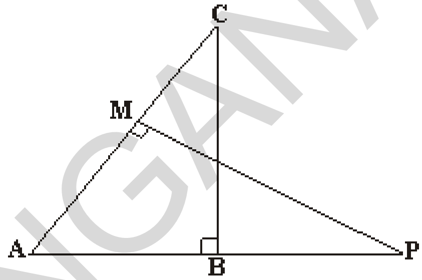


2. ರವಿಯ ಎತ್ತರ 1.82ಮೀ. ಅವನು ತನ್ನ ಮನೆಯ ಹಿತ್ತಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡನು. ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ನೆಲದ ಮೇಲೆ 12.20 ಮೀ. ದೂರ ನಡೆದರೆ, ಅವನ ನೆರಳು ಮತ್ತು ಮರದ ನೆರಳಿನ ತುದಿ ಭಾಗಗಳು ಖಚಿತವಾಗಿ ಏಕೀಭವಿಸುವವು. ಅವನು ಈಗ ಆ ನೆರಳಿನ ತುದಿಯಿಂದ 6.10ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದರೆ, ಆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?




3. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ, AB ಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುವುದಾರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು 'P' ಅದರ ಕರ್ಣ AC , DP ಯನ್ನು ಬಿಂದು Q ಬಳಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಆದರೆ $CQ \times PQ = QA \times QD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\Delta ABC$ ಮತ್ತು $\Delta AMP$ ಗಳು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿವೆ.




ಆದರೆ (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. ಒಂದು ವಿಮಾನವು ವಿಮಾನಾಶ್ರಯದಿಂದ ಗಂಟೆಗೆ 1000 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಿಂದ ಉತ್ತರದ ಕಡೆಗೆ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಮಾನವು ಅಲ್ಲಿಂದ ಗಂಟೆಗೆ 1200 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಿಂದ ಪಶ್ಚಿಮದ ಕಡೆಗೆ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ $1\frac{1}{2}$ ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಆ ಎರಡು ವಿಮಾನಗಳು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ?

6. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ನಲ್ಲಿ ಶೃಂಗ C ನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AC ಮತ್ತು CB ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. ಅವು ಆ ಬಾಹುಗಳನ್ನು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತಿವೆ ಹಾಗಾದರೆ,

ಆದರೆ (i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

(ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

(iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :** ★ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ ಪರಿಚಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಮೂಲಕ ಗಿಡಗಳು/ಸ್ಥಂಭಗಳು/ದೇವಾಲಯಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

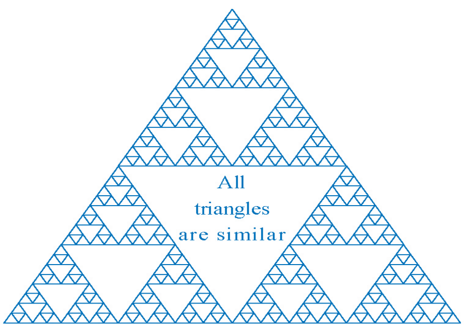
1. ಅಳತೆಗಳು ಬೇರೆಯಾಗಿದ್ದರೂ, ಒಂದೇ ಆಕಾರವಿದ್ದು ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಗಳು ಸಮನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವವು. ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು.
2. ಎಲ್ಲಾ ಸರ್ವಸಮ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಮರೂಪಗಳೇ ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.
3. ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ
   (i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.
   (ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ( ಅಥವಾ ಸಮಾನುಪಾತ)ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ನಿಯಮಗಳು ಅವಶ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

4. ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.
5. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನೀಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)
7. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು.
8. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಹಾಗೆಯೇ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.(ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)
9. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮ ಕೋನೀಯಗಳು ಹಾಗಾಗಿ ಅವು ಸಮರೂಪಿಗಳು. (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)
10. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು.
11. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಶೃಂಗದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಲಂಬಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪಗಳು ಅಲ್ಲದೆ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಹ ಸಮರೂಪಗಳು.
12. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ (ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)
13. ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದು.

**ಪಜಿಲ್ :**

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆ ತ್ರಿಭುಜ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ 4 ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೆ ಹಾಗೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಹಾಗೇ ಮುಂದುವರೆಸಿಕೊಂಡು ಹೋದರೆ, ಏರ್ಪಟ್ಟ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಏಕೆ? ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ.



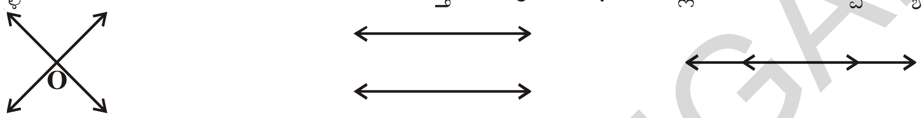
ಅಧ್ಯಾಯ
9

# ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಛೇದಕಗಳು

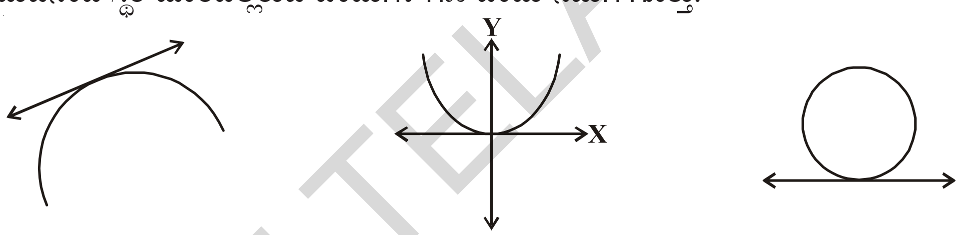
## (Tangents and Secants to a Circle)

## 9.1 ಪರಿಚಯ :

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ, ಇಲ್ಲವೇ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆಯೇ ಇರಬಹುದು ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.




ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ? ನೀವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡಂತೆ ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ವಕ್ರ "ಪರಾವಲಯ" ವಾಗಿ ಇರಬಹುದು ಇಲ್ಲವೇ ಸರಳ ಸಂವೃತ ವಕ್ರವಾದ ವೃತ್ತ ("Circle") ವಾದರೂ ಆಗಬಹುದು. ವೃತ್ತ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಥಿರ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.



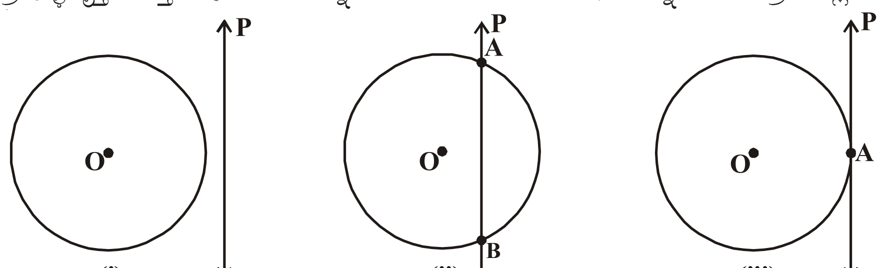

ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೈಕಲ್ ತುಳಿದಾಗ, ರೈಲು ಹಳಿ (Track)ಗಳ ಮೇಲೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಇಂತಹವು. ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವು ನಮಗೆ ಗೋಚರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಿರಿ?

ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

### 9.1.1 ಒಂದು ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ (A Line and A Circle) :

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಒಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಿರಿ ಎಂದು ಹೇಳಿದಾಗ ಅವನ್ನು ಮೂರು ವಿಧವಾಗಿ ಮಾತ್ರವೇ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂದು ಸಲ್ಮಾನ್ ವಾದಿಸಿದನು.

'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಈ 3 ವಿಧಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.




(i) (ii) (iii)

ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ PQ ರೇಖೆಗೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ PQ ನ್ನು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅಖಂಡಿತ ರೇಖೆ ಎನ್ನುವರು.

ಚಿತ್ರ (ii)ರಲ್ಲಿ PQ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿದೆ. ಈ ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ AB ಜ್ಯಾ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ PQ ವನ್ನು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ **ಖಂಡಿತ ರೇಖೆ ಇಲ್ಲವೇ ಛೇದಕ** ಎನ್ನುವರು.

ಚಿತ್ರ (iii) ರಲ್ಲಿ PQ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ **ಸ್ಪರ್ಶಕ** ಎನ್ನುವರು.

ನಾವು ಈ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಇತರ ಯಾವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಡಿಸಲಾರೆವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ನಾವು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಹೇಗೆ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ, ಅವುಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿತು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

### ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ ?

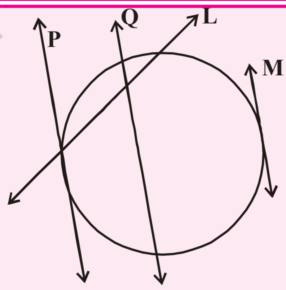
ಸ್ಪರ್ಶಕ (Tangent) ಎನ್ನುವ ಪದ ಲಾಟಿನ್ ಪದ ಟಾನ್‌ಗ್ರೀ (Tangere) ನಿಂದ ಬಂದಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಈ ಪದವನ್ನು ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಡೆನ್ಮಾರ್ಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಥಾಮಸ್ ಫಿಸ್ಕಿ, 1583 ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಪಡಿಸಿದನು.

### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

i. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿ ನಾಲ್ಕು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇನ್ನೂ ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ?

ii. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

iii. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಆಗುವವು.



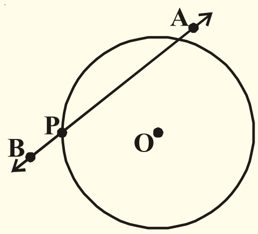

## 9.2 ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು (TANGENTS OF A CIRCLE) :

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಾದರೂ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಸಮತಲದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೋ ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ?

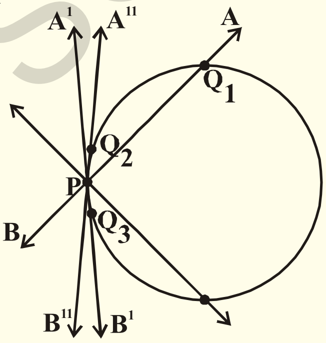
ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

### ಚಟುವಟಿಕೆ (ACTIVITY) :

ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಬ್ಬಿಣದ ತಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಬಳಿ AB ಎನ್ನುವ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯಂತಹ ತಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು,




P ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಾಗಿಸಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವ ವಿಧವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿ ವೃತ್ತವನ್ನು, AB ಕಬ್ಬಿಣದ ತಂತಿ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಈ AB ತಂತಿ ವೃತ್ತವನ್ನು P ಬಳಿ ಛೇದಿಸಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (ಪರಿಕರ)ಯನ್ನು ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟು, P ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಾಗಿ AB ತಂತಿಯನ್ನು ನಿಧಾನವಾಗಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಈ ತಂತಿ P ನಿಂದ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ ನಾವು $Q_1$, $Q_2$ ಮತ್ತು $Q_3$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.



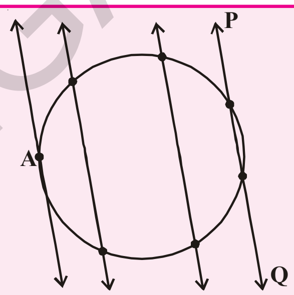
ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಈ ತಂತಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ P ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸ್ಥಾನ (ABಯ $A^1B^1$ ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.) ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ P ಬಳಿ ಮಾತ್ರವೇ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದೆ. ಇದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ. ABಯ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ Pಬಳಿಯೇ ಅಲ್ಲದೇ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $A^1B^1$ ಮಾತ್ರವೇ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು (Pಬಳಿ).

ಇದರಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಇರುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

AB ತಂತಿಯನ್ನು ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಜರುಗಿಸಿದರೂ ಅದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ತಂತಿಯನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಹೋಲುತ್ತವೆ. ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಆದರೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳು ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಚಲಿಸಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಆ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಛೇದಕವು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

## ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

ಒಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ PQ ಛೇದಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಛೇದಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಮತ್ತೇ ಕೆಲವು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಛೇದಕವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಕಡೆಗೆ ಜರುಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ ವೃತ್ತ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಏನಾಗುತ್ತಿದೆ ?

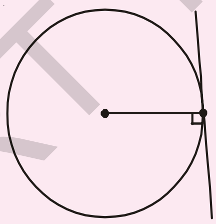


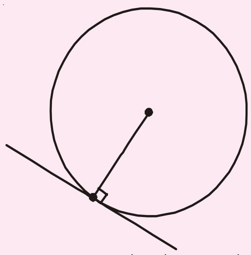

ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ?

ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಎಳೆಯಬಹುದು ?

ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು 'ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಏಕೈಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು 'ಸ್ಪರ್ಶಕ ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

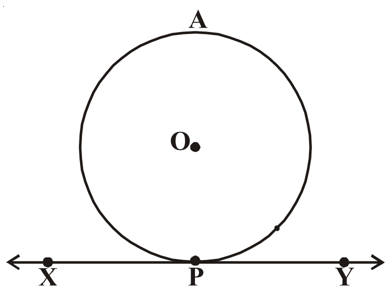
ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ :





ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ? ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಟ್ಟಾರೆ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ? ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೂ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೂ ಮಧ್ಯೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಕ್ಕೆ ಏನಾದರೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಇದೆಯೇ ? ಇವು ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಪ್ರಮೇಯ-9.1 :** ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ಆ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

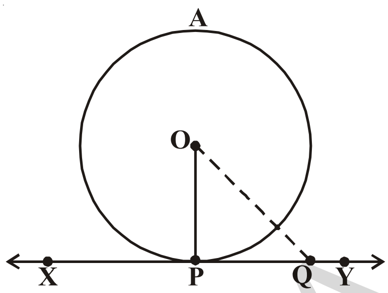



**ದತ್ತ** : 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ XY ಯು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದಿದೆ.

**ಸಾಧನೀಯ** : OP ಯು XYಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ($OP \perp XY$)

**ಸಾಧನೆ** : ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ ಒಂದು ಹೊಸ

ಪ್ರತಿಪಾದನೆ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆ ಇಲ್ಲವೇ ಊಹೆಯು ವೈರುಧ್ಯಕ್ಕೆ ದಾರಿ ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ, XY ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು (P ಅಲ್ಲದೇ) Qವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ OQ ನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ




Q ಬಿಂದುವು ಖಚಿತವಾಗಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ?) (Q ಒಂದು ವೇಳೆ ವೃತ್ತದ ಅಂತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ XY ಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗದೆ ಛೇದಕವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ OQ ಎಂಬುದು ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಗಿಂತ ಉದ್ದವಾಗಿರುತ್ತದೆ [ ಹೇಗೆ ?]

ಅಂದರೆ , $OQ > OP$.

XY ಮೇಲೆ Pನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ O ನಿಂದ XYಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ OPಯು ಚಿಕ್ಕದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಊಹಿಸಿದಂತೆ OPಯು XYಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಭಾವನೆ ತಪ್ಪು ಎಂದು ಸಾಬೀತಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು XYಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

***ಸೂಚನೆ*** : ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಎಳೆದ ಅಭಿಲಂಬ (Normal) ಎಂದು ಕೂಡ ಹೇಳುವರು.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಸಾಧಿಸುತ್ತೀರಿ ?

"ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವಲ್ಲದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ."

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(i) ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವು P ನಿಂದ ಒಂದೇ ಲಂಬ OP ಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತಪರಿಧಿ ಯ ಮೇಲಿನ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

(ii) ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ, ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ XY ಯು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರ ಬಳಿ, ಉಪಾಧ್ಯಾಯರ ಬಳಿ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

## 9.2.1 ವೃತ್ತದ ಮೆಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

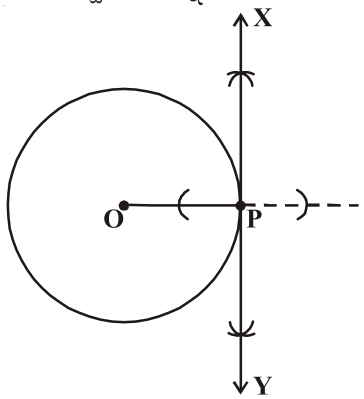
### (CONSTRUCTION OF TANGENT TO A CIRCLE

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು ? ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಎನ್ನುವ ಫಲಿತವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಎಂದರೆ ಆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಎಂದರ್ಥ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕೆಂದರೆ ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು.

ಈ ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

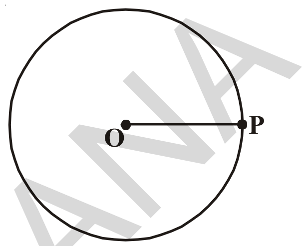
**ರಚನೆ :** ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ನಮಗೆ 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ನಾವು P ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.




**ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು :**

1. 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.




2. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ P ನಿಂದ ಒಂದು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು XY ಎನ್ನಿರಿ.

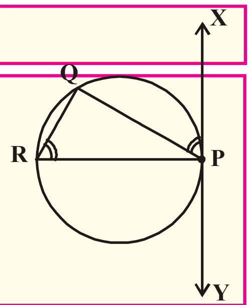
3. XY ಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು.

P ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲಿರಾ ? ಕಾರಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಎಳೆಯುತ್ತೀರಿ ?

**ಸೂಚನೆ :** $\angle QPX$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಎನ್ನುವ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ವಿವರಿಸಿರಿ




## 9.2.2 ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು (Finding Length of the Tangent ) :

ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೇ ? ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವೇ ? ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ :** 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. P ಯು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು OP = 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

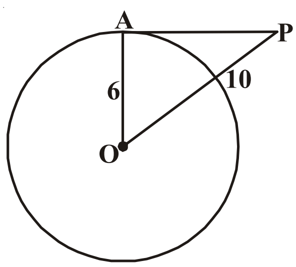
**ಸಾಧನೆ :** ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಗಳು ( ಪ್ರಮೇಯ 9.1)

ಈಗ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PA ಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು OA ಯು ತ್ರಿಜ್ಯ.

$\therefore\ OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90^\circ$

ಈಗ $\Delta OAP$ ನಲ್ಲಿ $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ)

$$10^2 = 6^2 + PA^2$$
$$100 = 36 + PA^2$$
$$PA^2 = 100 - 36$$
$$= 64$$
$$\therefore\ PA = \sqrt{64} = 8 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$



## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.1

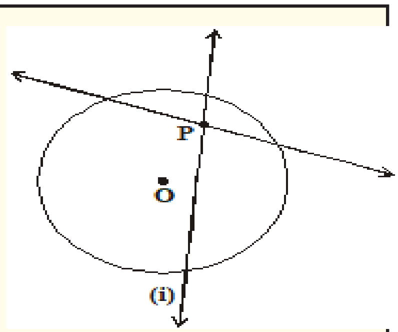
1. ಕೆಳಗಿನ ಖಾಲಿಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.
   (i) ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವು ................ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
   (ii) ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ............ ಎನ್ನುವರು.
   (iii) ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಗರಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ................
   (iv) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ............... ಎನ್ನುವರು.
   (v) ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ನಾವು ............. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
2. 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು PQ ಸ್ಪರ್ಶಕವು P ಬಳಿ ಸಂಧಿಸಿದೆ. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು Q ನಡುವಿನ ಅಂತರ OQ = 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ PQ ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
4. 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮಾಂತರಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

## 9.3 ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು (NUMBER OF TANGENT TO A CIRCLE FROM ANY POINT)

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

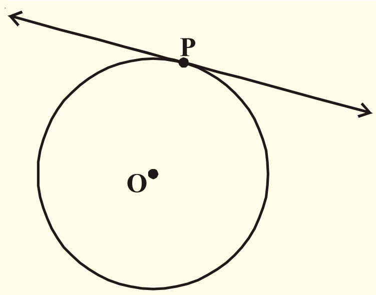
### ಚಟುವಟಿಕೆ (ACTIVITY) :

(i) ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಬಿಂದು Pಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. ಈ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಳೆಯಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಈ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ? ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಛೇದಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಅಲ್ಲವೇ? ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



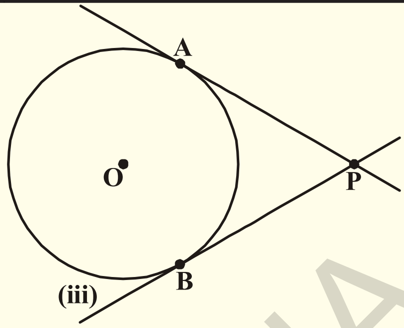
(i)

(ii) ಈಗ, ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. ಬಿಂದು Pನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರಚಿಸಿ, ಅದೇ ಬಿಂದು Pನಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಅದು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಏಕೆ? ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿಯೇ ಇರುತ್ತೀರಿ. (ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)



(ii)

(iii) ಈ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, ಬಿಂದು P ನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಕಡೆಗೆ ರೇಖಾ ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ ? ನೀವು ಈ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡೇ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. (ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ).




ನಾವು ಮಾಡಿದ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಸಂದರ್ಭ (i) : ವೃತ್ತದ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಾದರೂ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾರೆವು.

ಸಂದರ್ಭ (ii) : ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಸಂದರ್ಭ (iii) : ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡೇ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳು, PA, PB ಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು, ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಚಿತ್ರ (iii)ರಲ್ಲಿ PA ಮತ್ತು PB ಗಳು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಉದ್ದಗಳು ಆಗುತ್ತವೆಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು PA ಮತ್ತು PB ಗಳ ಉದ್ದಗಳ ನಡುವೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ ?

**ಪ್ರಮೇಯ-9.2 : ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದ ಸಮ.**

**ದತ್ತ :** O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಯು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು. PA ಮತ್ತು PB ಗಳು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು

**ಸಾಧನೀಯ :** PA = PB

**ಸಾಧನೆ :** OA, OB ಮತ್ತು OP ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (ಪ್ರಮೇಯ 9.1 ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ )

ಈಗ $\Delta OAP$ ಮತ್ತು $\Delta OBP$ ಗಳಲ್ಲಿ

OA = OB (ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

OP = OP (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

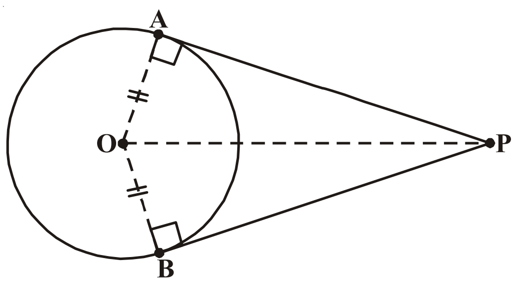
(ಲಂ.ಕ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$

ಇದರಿಂದ PA = PB ಆಗುವುದು

(ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು)

ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.




**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

## 9.3.1. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು :
### (CONSTRUCTION OF TANGENTS TO A CIRCLE FROM AN EXTERNAL POINT)

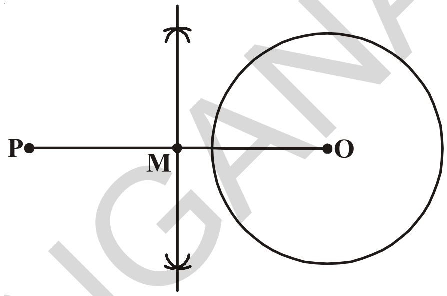
ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿರುವಿರಿ. ಈಗ ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ರಚಿಸುತ್ತಾರೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ರಚನೆ** : ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

**ದತ್ತ** : 'O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಯು ಬಾಹ್ಯದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದು, ಈಗ ನಾವು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

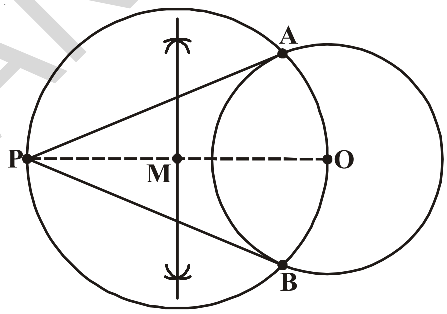
**ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು** :

**ಹಂತ** (i) : POನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. PO ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು M ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿ.




**ಹಂತ** (ii) : M ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ PM ಅಥವಾ MO ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ.

**ಹಂತ** (iii) : PA ಮತ್ತು PBಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. PA ಮತ್ತು PB ಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.




**ಸಾಧನೆ** : ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದೋ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

OAನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

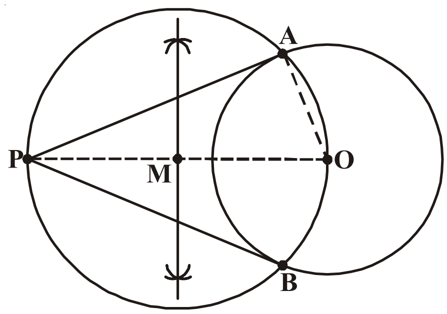
$\angle PAO$ ಯು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle PAO = 90°$ ಆಗುವುದು.

ಈಗ $PA \perp OA$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

OAಯು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 9.1ರ ವಿಲೋಮದಿಂದ PAಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ವಾಗುವುದು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ PB ಯು ಸಹ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುವುದು.

ಸಾಧಿಸಿದೆ.




ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು, ಛೇದಕಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಆಸಕ್ತಿಕರ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಹೇಳಿಕೆ-1** : ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದೋ ಯೋಚಿಸಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ** : O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವು. PQ ಮತ್ತು PRಗಳು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. OQ ಮತ್ತು ORಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

$\Delta OQP$ ಮತ್ತು $\Delta ORP$ ಗಳು ಸರ್ವಸಮಗಳು, ಏಕೆಂದರೆ

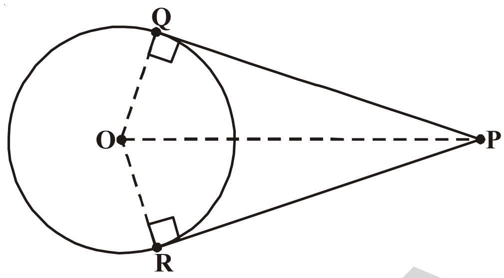
$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (ಪ್ರಮೇಯ 9.1)

OQ = OR (ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

OP ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle OPQ = \angle OPR$ (CPCT)

ಆದ್ದರಿಂದ, OP ಯು $\angle QPR$ ನ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆ

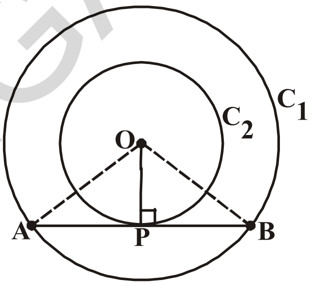



ಇದರಿಂದ, ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನಾರ್ಧ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಹೇಳಿಕೆ-2 :** ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು, ಅಂತರ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಅರ್ಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

ಇದು ಯಾವ ರೀತಿ ಸತ್ಯವೋ ನೋಡೋಣ.

**ಸಾಧನೆ :** O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು $C_1$ ಮತ್ತು $C_2$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $C_1$ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ABನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತ $C_2$ ಯು P ಬಳಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ). ಈಗ AP = PB ಆಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.




O, P ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

$C_2$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ AB ಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು OP ಯು ತ್ರಿಜ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 9.1 ರ ಪ್ರಕಾರ

$OP \perp AB$ ಆಗುವುದು.

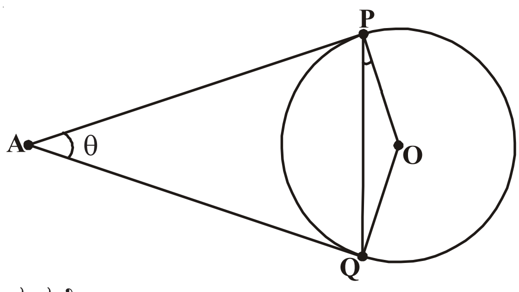
ಈಗ, $\Delta OAP$ ಮತ್ತು $\Delta OBP$ ಗಳು ಸರ್ವಸಮತೆಗಳು (ಹೇಗೆ?) ಇದರಿಂದ AP = PB ಆಗಿದೆ. OP ಎನ್ನುವುದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬ. ಆದ್ದರಿಂದ AB ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅದು ಅರ್ಧಿಸುವುದು.

**ಹೇಳಿಕೆ-3 :** O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು Aನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು AP ಮತ್ತು AQ ಆದರೆ $\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$ ಆಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲೆಯಾ ?

**ಸಾಧನೆ :** O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು A ನಿಂದ AP ಮತ್ತು AQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

ನಾವು $\angle PAQ = 2\angle OPQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.




$\angle PAQ = \theta$ ಆದರೆ

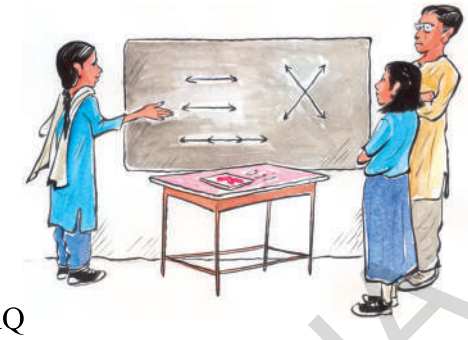
ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ 9.2 ರ ಪ್ರಕಾರ

AP = AQ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta APQ$ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180°$ (ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$



$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಪ್ರಮೇಯ 9.1 ರ ಪ್ರಕಾರ,

$\angle OPA = 90°$

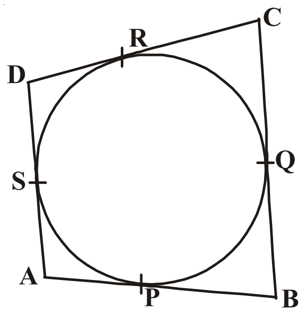
ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

$\therefore \angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ$ ಆಗುವುದು.

ಇದರಿಂದ $\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಹೇಳಿಕೆ-4 :** ಒಂದು ವೃತ್ತವು ABCD ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು P, Q, R, S ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಆಗ AB+CD = BC + DA ಆಗುವುದು.




ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ ? AB, CD, BC, DA ಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. ಏಕೆಂದರೆ ವೃತ್ತವು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತಾ, ಅದರ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು P, Q, R, S ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದೆ. (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮುಂದುವರಿಸುವಿರಿ?

**ಸಾಧನೆ :** ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ABCDಯ ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಗಳನ್ನು ವೃತ್ತವು P, Q, R ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳ ಬಳಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 9.2 ರ ಪ್ರಕಾರ, ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮ.

AP = AS

BP = BQ

DR = DS

ಮತ್ತು CR = CQ

ಇವನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ

ಇಲ್ಲವೇ (AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)

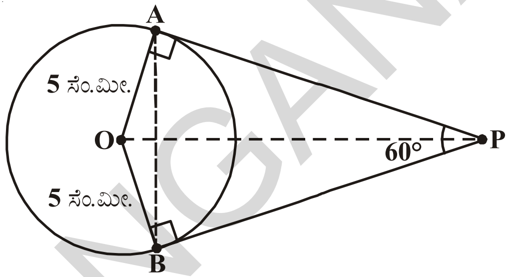
ಅಥವಾ AB + CD = BC + DA.

ಈಗ ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ, ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಇದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದೋ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-1.** ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 60° ಇದ್ದರೆ ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ :** ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ನಮಗೆ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅಂತರವಾಗಲಿ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವಾಗಲಿ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದು, ಆದರೆ ನಮಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡರೆ, ನಾವು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮುಂಚೆ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವು P ನಿಂದ PA ಮತ್ತು PBಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $60^o$. ಇದರಲ್ಲಿ $\angle APB = 60^o$. OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, OP ಎಂಬುದು $\angle APB$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.



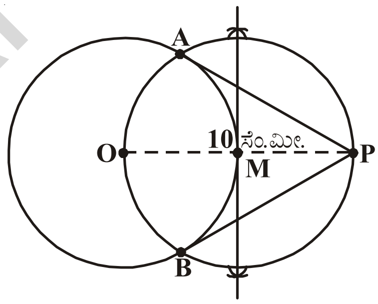

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle OAP = \angle OPB = \frac{60^o}{2} = 30^o$

$(\because \Delta OAP \cong \Delta OBP)$

ಈಗ $\Delta OAP$ನಲ್ಲಿ $\sin 30^o = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{OA}{OP}$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{OP}$ (ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತದಿಂದ)

OP = 10 ಸೆಂ.ಮೀ.




ನಾವು ಈಗ, O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ P ಎನ್ನುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸೋಣ. OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ರಚನೆ 9.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡೋಣ. PA ಮತ್ತು PB ಎನ್ನುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. $\Delta OAP$ ನಲ್ಲಿ $\angle A = 90^o$ $\angle P = 30^o$ $\angle O = 60^o$ ಮತ್ತು AO=5cm $\Delta OAP$ ರಚಿಸಿ P ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರಚನೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ

$\angle BOA = 120^o$ಆಗುವಂತೆ OA ಮತ್ತು OB ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle BOA$ ಗೆ ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು OA, OB ಗಳಿಗೆ A ಮತ್ತು B ಬಳಿ ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು $\angle BOA$ ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಇವನ್ನು ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.2

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ, ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

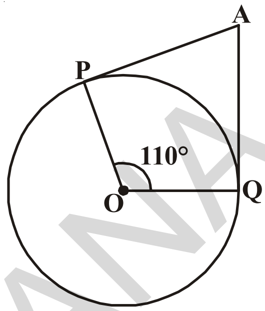
(i) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೂ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ನಡುವಿನ ಕೋನವು.

(a) 60° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

(ii) Q ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಉದ್ದ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ Q ಬಿಂದುವಿನ ದೂರ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

(a) 7ಸೆಂ.ಮೀ. (b) 12 ಸೆಂ.ಮೀ. (c) 15ಸೆಂ.ಮೀ. (d) 24.5ಸೆಂ.ಮೀ.

(iii) ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ AP ಮತ್ತು AQ ಗಳು ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಮತ್ತು $\angle POQ = 110°$, ಆದರೆ $\angle PAQ =$



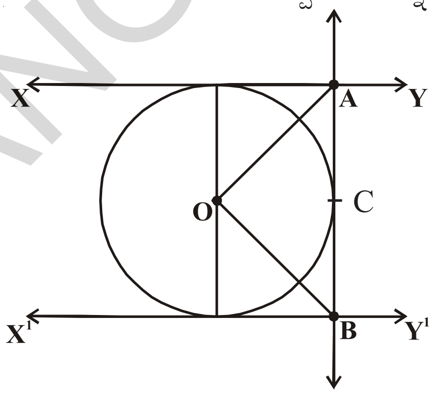

(a) 60° (b) 70°

(c) 80° (d) 90°

(iv) O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ PA ಮತ್ತು PB ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿವೆ. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 80° ಆದರೆ $\angle POA =$

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°

(v) ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ XY ಮತ್ತು $X^1Y^1$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು C ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತಾ XY ನ್ನುA ಬಳಿ $X^1Y^1$ನ್ನುB ಬಳಿ ಛೇದಿಸಿದೆ. ಆದರೆ $\angle AOB =$

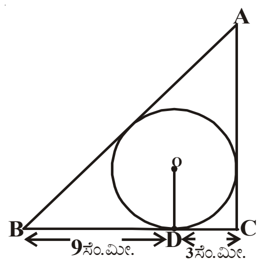



(a) 80° (b) 100°

(c) 90° (d) 60°

2. 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 3ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಂದ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

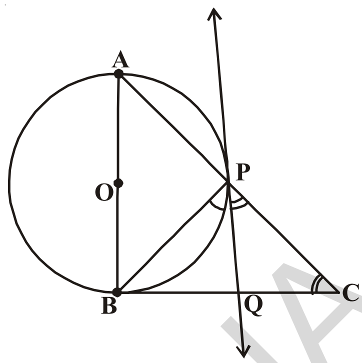



4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರ $\Delta$ ABC ನಲ್ಲಿ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು D ಯು BC ಯನ್ನು ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. BD= 9 ಸೆಂ.ಮೀ., DC= 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಯಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ. ಆದರೆ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸರಿನೋಡಿರಿ.

6. 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ, 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಏಕ ಕೇಂದ್ರ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ, ಸರಿನೋಡಿರಿ.

7. ಒಂದು ಬಳೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಬಾಹ್ಯದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?



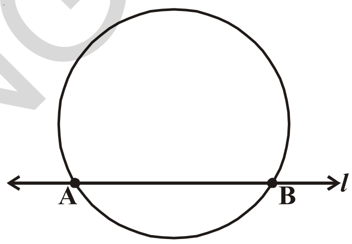

8. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ $\Delta ABC$ನಲ್ಲಿ $AB$ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಕರ್ಣ $AC$ ನ್ನು $P$ ಬಳಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದಿದೆ. $P$ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು $BC$ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು 'R' ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೀವು ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಲ್ಲಿರಿ?

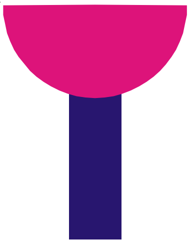
(**ಸೂಚನೆ** : ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವು ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.)

## 9.4 ಛೇದಕದೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡುವ ವೃತ್ತಖಂಡ :

### (SEGMENT OF A CIRCLE FORMED BY A SECANT) :




ನಾವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ. ವೃತ್ತವನ್ನು ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಛೇದಕವೆಂದು, ಆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಜ್ಯಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

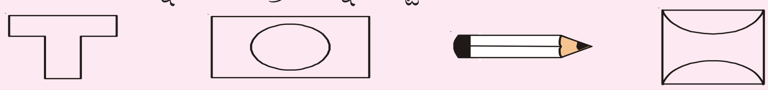


ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ '$l$' ರೇಖೆಯು ಛೇದಕ ಮತ್ತು $AB$ ಜ್ಯಾ.

ಶಂಕರ್ ಗುಲಾಬಿ ಮತ್ತು ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದಗಳಿಂದ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಶುಭ್ರತೆ ತೊಟ್ಟಿ(washbasin) ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ? ಈ ಚಿತ್ರವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತಿದೆ. ಒಂದು ಭಾಗ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ ? ಕೆಳಗಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ನಾವು ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

### ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :

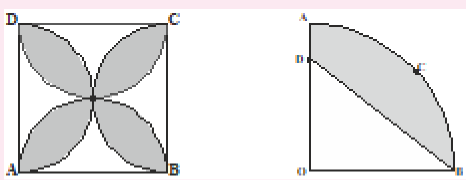
ಶಂಕರ್ ತಯಾರಿಸಿದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಈ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿವೆ ಗುರುತಿಸಿ.

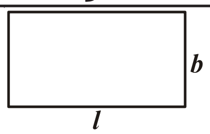
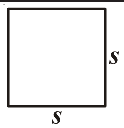
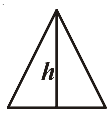
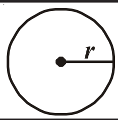
ನೀವು ಇಂತಹ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ವಿಭಿನ್ನ ಚಿತ್ರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿರಿ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**



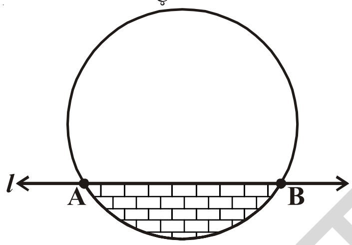

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರಗಳ ಒಳಗೊಂಡ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

ನಾವು ಕೆಲವು ರೇಖಾಗಣಿತ ಚಿತ್ರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆಯೋ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

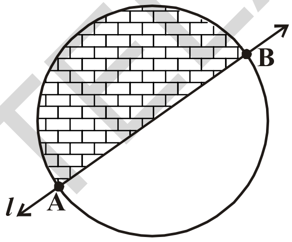
| ಕ್ರ. ಸಂ. | ಚಿತ್ರ | ಅಳತೆಗಳು | ವಿಸ್ತೀರ್ಣ |
|---|---|---|---|
| 1. |   | ಉದ್ದ = $l$<br>ಅಗಲ = $b$ | A = $lb$ |
| 2. |   | ಬಾಹು = s | A = $s^2$ |
| 3. |   | ಪಾದ = $b$<br>ಎತ್ತರ = $h$ | A = $\frac{1}{2}bh$ |
| 4. |   | ತ್ರಿಜ್ಯ = $r$ | A = $\pi r^2$ |

## 9.4.1. ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು :

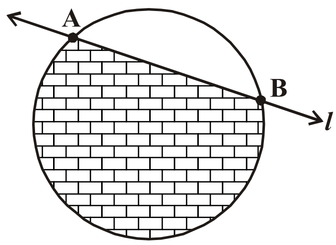
ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ವೃತ್ತಖಂಡಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.



(i)

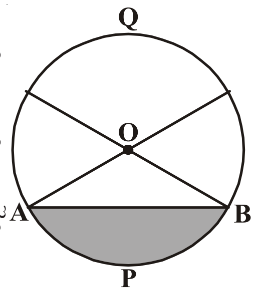


(ii)



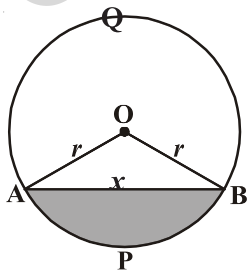
(iii)

ವೃತ್ತ ಕಂಸ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾನಿಂದ ಆವೃತಗೊಂಡ ವೃತ್ತದ ಭಾಗವನ್ನು ವೃತ್ತಖಂಡ ಎನ್ನುವರು. ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗ ( ) ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ (i) ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು, ಚಿತ್ರ (ii) ಅರ್ಧವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು, ಚಿತ್ರ (iii) ಅಧಿಕವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.




ಈ ವೃತ್ತ ಖಂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಿರಿ ? ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ವ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಜ್ಯಾವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಅದರ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಮಡಿಚಿರಿ. ಏರ್ಪಟ್ಟ ಚಿಕ್ಕ ಭಾಗವನ್ನು ಛಾಯಗೊಳಿಸಿರಿ. ಈ ಛಾಯಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ? ಇದು ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ (APB) ಮತ್ತು ಛಾಯೆಗೊಳಿಸದ ಭಾಗವನ್ನು ಏನೆನ್ನುತ್ತಾರೆ? ಇದು ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ (AQB) ಆಗುವುದು.




ನೀವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡ, ವೃತ್ತಖಂಡದ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಛಾಯಗೊಳಿಸದ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗವು (ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ) ಸೇರಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಅಥವಾ ಸೆಕ್ಟರ್ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಇದು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡಗಳ ಮಿಲನ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 'O' ಕೇಂದ್ರ '$r$' ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ OAPB ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಅಥವಾ ಸೆಕ್ಟರ್. $\angle AOB$ = '$x^0$' ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ $360°$ ಕೋನ ಉಂಟಾದರೆ ಆ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi r^2$ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ $1°$ ಕೊನದಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\dfrac{1°}{360°} \times \pi r^2$.

ಅದೇ ರೀತಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $x°$ ಕೋನದಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\dfrac{x°}{360°} \times \pi r^2$ ಆಗುವುದು.

ಈಗ O ಕೇಂದ್ರ '$r$' ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಖಂಡ APB ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ,

APB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAPB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ- $\Delta OAB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \dfrac{x°}{360°} \times \pi r^2$ - $\Delta OAB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಧಿಕವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ ?

**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

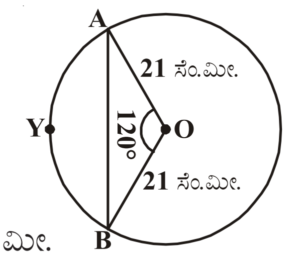
1. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i. $60°$ ii. $30°$ iii. $72°$ iv. $90°$ v. $120°$

2. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳಿನ ಉದ್ದ 14 ಸೆಂ.ಮೀ. 10 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಮುಳ್ಳಿನಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-1.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle AOB = 120^0$ ಆದರೆ ವೃತ್ತಖಂಡ AYB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \dfrac{22}{7}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ = 1.732 ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ)




**ಸಾಧನೆ :** AYB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= OAYB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರದ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – $\Delta OAB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈಗ OAYB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರದ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \dfrac{120^0}{360^0} \times \dfrac{22}{7} \times 21 \times 21$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

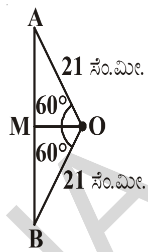
= 462 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ. ...(1)

$\Delta OAB$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $OM \perp AB$ ನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

OA = OB ಆದ್ದರಿಂದ ಲಂ.ಕಂ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ ಆಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಮೇಲಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗುವುದು ಮತ್ತು

$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$




ಈಗ, $OM = x$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂದುಕೊಂಡರೆ

$\Delta OMA$ ನಿಂದ $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0.$

ಅಥವಾ $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

ಅಥವಾ $x = \frac{21}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $OM = \frac{21}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅದೇ ರೀತಿ $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= 21\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಇದರಿಂದ, $\Delta OAB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ. ...(2)

AYB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

($\because$ (1), (2) ಗಳಿಂದ]

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

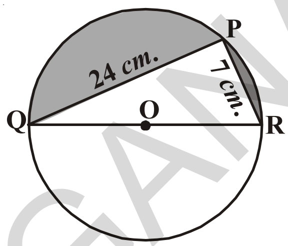
$= 271.047$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ PQ = 24 ಸೆಂ.ಮೀ., PR = 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ QR ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi=\frac{22}{7}$)

**ಸಾಧನೆ :** ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= OQPR ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - PQR ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

QR ವ್ಯಾಸ, ಆದ್ದರಿಂದ $\angle QPR = 90°$ (ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನ)
ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,




$\Delta QPR$ನಲ್ಲಿ $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಇದರಿಂದ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{1}{2}$ QR

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ OQPR ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{25}{2}\times\frac{25}{2}$

= 245.54 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ. ..... (1)

QPR ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

= 84 ಸೆಂ.ಮೀ.$^2$ ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಗಳಿಂದ

ಛಾಯಗೊಳಿಸಿದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= 245.54 - 84

= 163.54 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ-3.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮೇಜಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ 6 ಸಮಾನ ಆಕೃತಿಗಳಿವೆ. ಮೇಜಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.ಗೆ ₹5 ರಂತೆ ಮೇಜಿನ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಾಕಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ? ($\sqrt{3}$ = 1.732)

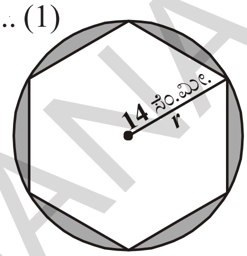
**ಸಾಧನೆ :** ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಂತಸ್ಥವಾದ ನಿಯಮಿತ ಷಡ್ಭುಜದ ಬಾಹುವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

$\therefore$ ನಿಯಮಿತ ಷಡ್ಭುಜದ ಬಾಹು = 14 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆಕೃತಿ ಮಾಡಲಾದ ಆರು ವೃತ್ತಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ -ನಿಯಮಿತ ಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈಗ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ. ..... (1)




ನಿಯಮಿತ ಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$

$= 509.2$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ. ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2)ರಿಂದ ಆರು ಆಕೃತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 616 - 509.21$

$= 106.79$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.

ಇದರಿಂದ, ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.ಗೆ ₹5 ರಂತೆ ಆರು ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು

= ₹106.79 × 5

= ₹533.95

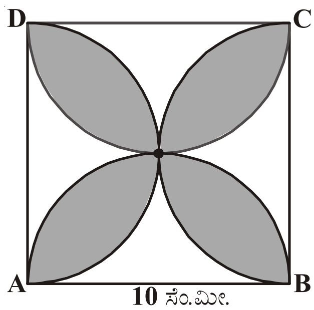
## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.3

1. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)

   i. ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ     ii. ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ

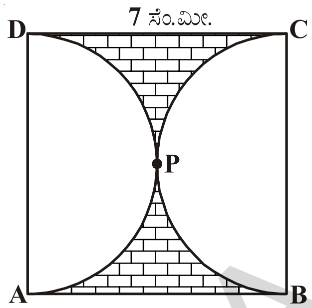
2. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 120° ಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿದೆ. ಜ್ಯಾನೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಮತ್ತು $\sqrt{3} = 1.732$)

3. ಒಂದು ಕಾರಿನ ಗ್ಲಾಸಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಆಧ್ಯಾರೋಹಣ ಆಗದ ನೀರನ್ನು ಒರಸುವ ವೈಪರ್‌ಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿ ವೈಪರ್‌ನ ಉದ್ದ25 ಸೆಂ.ಮೀ. 115° ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ನೀರನ್ನು ಒರೆಸುತ್ತಿದೆ. ಒಂದೇ ಸಲ ಎರಡು ವೈಪರ್‌ಗಳು ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಗ್ಲಾಸ್‌ನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಒರಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$)



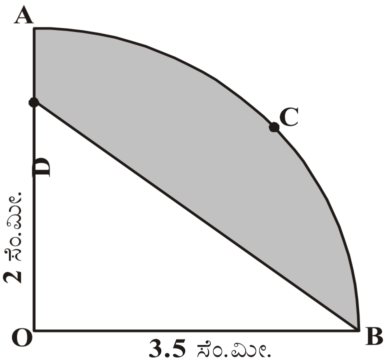

4. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಚೌಕದ ಬಾಹುವು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದೆ. ಚೌಕದ ಬಾಹುವು ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಕಡೆಗೆ ಎಳೆದಿದೆ. ಛಾಯಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABCD ಚೌಕದ ಬಾಹು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು APD ಮತ್ತು BPCಗಳು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳಾದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$)



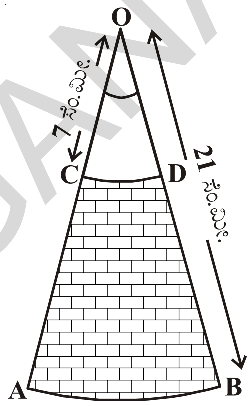

6. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ OACB ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ. ಪಾದ OD = 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

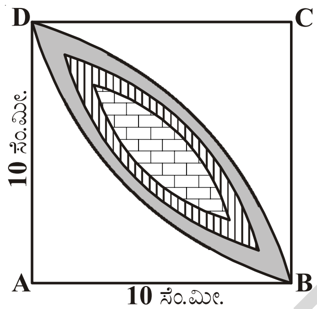



7. O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AB, CDಗಳು ಎರಡು ಕಂಸಗಳು (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರಿ) $\angle AOB = 30°$ ಆದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.)




8. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯವು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಯಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಪಾದಗಳ ನಡುವೆ ಏರ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಉಭಯ ಪ್ರದೇಶದ (ಛಾಯೆಗೊಳಿಸದ) ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)



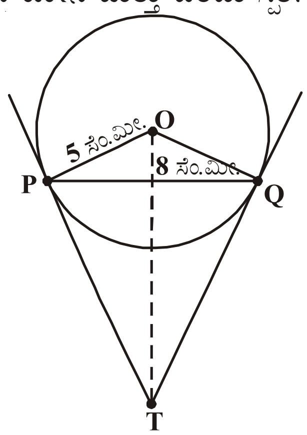

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

**[ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿರುವುದಲ್ಲ]**

1. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು ಏರ್ಪಡಿಸಿದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಪರಿಪೂರಕ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

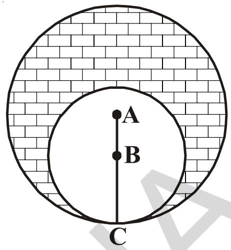
2. 5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ PQ ಜ್ಯಾನ ಉದ್ದ 8ಸೆಂ.ಮೀ. P ಮತ್ತು Q ನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು T ಬಳಿ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ. (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ). ಆದರೆ TPನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತಾ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

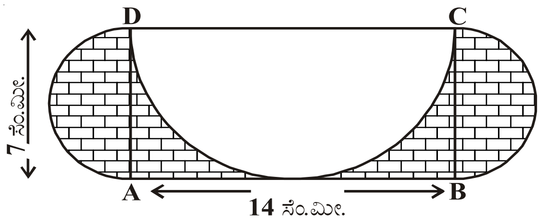


4. 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತ, B ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

5. ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. BC = 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle B = 90^0$. B ಶೃಂಗದಿಂದ AC ಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು BD, ಮತ್ತು B, C, D ಬಿಂದುಗಳಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. A ನಿಂದ ಈ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.




6. A, B ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು C ಬಳಿ ಸಂಧಿಸಿವೆ. AC = 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AB = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಛಾಯೆ ಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.




7. AB = 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು BC = 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿಂದ ABCD ಆಯತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. DC, BC ಮತ್ತು AD ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿರುವ ಮೂರು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಎಳೆದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು :

ನಾವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

1. ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಛೇದಕಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು, ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.
2. ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಭಾವನೆಗಳು, ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.
3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

   a) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ಆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು.

   b) ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದ ಸಮ.
4. ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

   a) ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

   b) ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
5. ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪೂರ್ವಫಲಿತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಿ ನೂತನ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.
6. ನಾವು ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ / ಅಧಿಕವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

ಅಧ್ಯಾಯ
10

# ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ
# (Mensuration)

## 10.1 ಪರಿಚಯ :

8, 9ನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಕುರಿತು ಕಲಿತು ಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಆ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದ ಸಂಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಏನು ? ಅವಶ್ಯಕತೆ ಏನು ? ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಅಳೆಯುತ್ತಾರೆ ? ಅಂದಾಜು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಕೋಣೆಗೆ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಅವಶ್ಯಕ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಆ ಕೋಣೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕೇ ಆಗಲಿ ಆ ಕೋಣೆಯ ಘನಫಲ ಅವಸರವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಬೆಳೆದ ಧಾನ್ಯವನ್ನು ತುಂಬಿಡಲು ಎಷ್ಟು ಚೀಲಗಳು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತವೆಯೋ ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಘನಫಲ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅವಸರವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆಯೋ ? ಏಕೆ ? ವಿವರಿಸಿರಿ.

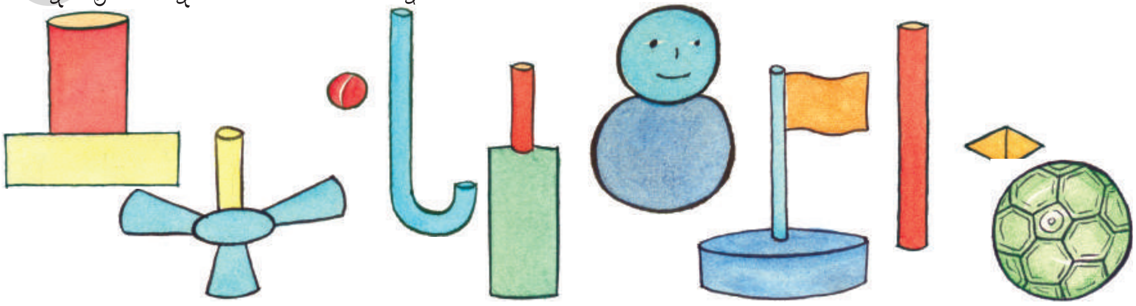
   i. ಒಂದು ಸೀಸೆಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ . ii. ಗುಡಾರ ತಯಾರು ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಬಟ್ಟೆಯ ಪರಿಮಾಣ

   iii. ಒಂದು ಲಾರಿಯಲ್ಲಿರುವ ಚೀಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. iv. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾದ ಗ್ಯಾಸ್ ಪ್ರಮಾಣ.

   v. ಒಂದು ಬೆಂಕಿಪೊಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾದ ಬೆಂಕಿಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

2. ಮೇಲೆ ಉದಾಹರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಇನ್ನು 5 ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿಸಿ, ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರನ್ನು ಘನಫಲ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಅವಶ್ಯಕವೋ ? ಹೇಳಿ ಎಂದು ಕೇಳಿರಿ.

ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲು ಇರುವ ಪರಿಸರಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿರುವ (ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಕೃತಿ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿರುವವು) ಘನಾಕೃತಿ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲವೇ ! ಕಂಬಗಳ ಮೇಲೆ ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ಮನೆಗಳು, ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬುನಾದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕುಗಳು, ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಹ್ಯಾಂಡಿಲನ್ನು ಹೊಂದಿ ಉಳಿದ ಭಾಗವೆಲ್ಲಾ ಸಮತಲವಾಗಿರುವ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಬ್ಯಾಟ್ ಮೊದಲಾದವು. ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ವಿಭಿನ್ನ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ ? ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿವೆ.

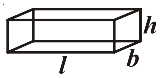
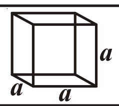
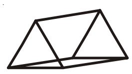
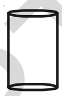
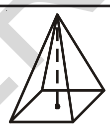
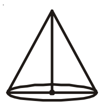
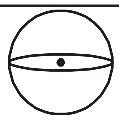
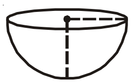


ಫುಟ್‌ಬಾಲ್‌ಗಳಂತಹ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿತು ಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ ಉಳಿದ ವಸ್ತುಗಳು ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಗೂಡುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟವುಗಳಾಗಿ ನಾವು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ನಾವು ಈಗ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಘನಾಕೃತಿಗಳು, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ಮೇಲೆ ಕೊಡಲಾದ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ತಿಳಿದ ಘನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿರಿ..
2. ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಪರಿಸರಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ 5 ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಗೂಡಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು / ಚಿತ್ರಗಳ ಕುರಿತು ಆಲೋಚಿಸಿರಿ.

ವಿವಿಧ ಘನಾಕೃತಿಗಳು, ಅವುಗಳು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ. ಘನಫಲಗಳನ್ನು ನೆನಪು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

| ಕ್ರ. ಸಂ. | ಘನಾಕೃತಿ ಹೆಸರು | ಆಕೃತಿ | ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ/ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ | ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ | ಘನಫಲ | ಸಂಕೇತ ವಿವರಣೆ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | ಆಯತಘನ |   | $2h(l+b)$ | $2(lb+bh+hl)$ | $lbh$ | $l$: ಉದ್ದ $b$: ಅಗಲ $h$: ಎತ್ತರ |
| 2. | ಘನ |   | $4a^2$ | $6a^2$ | $a^3$ | $a$: ಘನದ ಬಾಹು |
| 3. | ನೇರ ಪಟ್ಟಕ |  | ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ $\times$ ಎತ್ತರ | ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ+2( ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) | ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ | - |
| 4. | ನೇರ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ |  | $2\pi rh$ | $2\pi r(r+h)$ | $\pi r^2h$ | r:ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ h: ಎತ್ತರ |
| 5. | ನೇರ ಗೋಪುರ |  | $\frac{1}{2}$ (ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ) $\times$ ಓರೆ ಎತ್ತರ | ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ+ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ | $\frac{1}{3}$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ | - |
| 6. | ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕು |  | $\pi rl$ | $\pi r(l+r)$ | $\frac{1}{3}\pi r^2h$ | r:ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ h:ಎತ್ತರ $l$:ಓರೆ ಎತ್ತರ |
| 7. | ಗೋಳ |  | $4\pi r^2$ | $4\pi r^2$ | $\frac{4}{3}\pi r^3$ | r:ತ್ರಿಜ್ಯ |
| 8. | ಅರ್ಧಗೋಳ |  | $2\pi r^2$ | $3\pi r^2$ | $\frac{2}{3}\pi r^3$ | r:ತ್ರಿಜ್ಯ |

ಈ ಪಟ್ಟಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-1.** ಪಾದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 10 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಡೇರೆ ನಿರ್ಮಿಸಲು 2ಮೀಟರ್ ಅಗಲವಿರುವ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್‌ಗಳಷ್ಟು ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆ ಬೇಕಾಗಬಹುದು.

$\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\left.\right]$

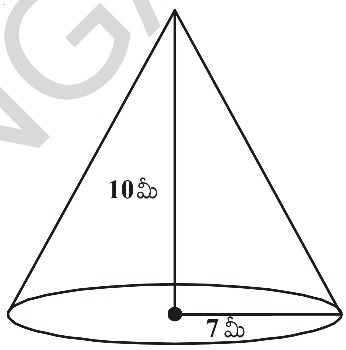
**ಪರಿಹಾರ :** ಡೇರೆಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $(r) = 7$ ಮೀ.

ಎತ್ತರ $(h) = 10$ ಮೀ.

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ $l^2 = r^2 + h^2$ ($\because$ $l^2 = \sqrt{r^2+h^2}$ )

$= \sqrt{49+100}$

$= \sqrt{149} = 12.2$ ಮೀ.




ಡೇರೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2$ ಚ. ಮೀ.

$= 268.4$ ಚ. ಮೀ.

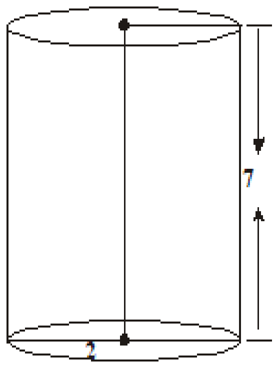
ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 268.4 ಚ.ಮೀ.

ಬಟ್ಟೆಯ ಅಗಲ = 2ಮೀ.

ಬಟ್ಟೆಯ ಉದ್ದ $= \frac{\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\text{ಅಗಲ}} = \frac{268.4}{2} = 134.2$ ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಣ್ಣೆಯ ಡ್ರಮ್‌ನ ಪಾದ ವ್ಯಾಸ 2 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 7 ಮೀಟರ್‌ಯಾಗಿದೆ. ಡ್ರಮ್‌ಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ಪೆಯಿಂಟರ್ 1ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹3 ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, 10 ಎಣ್ಣೆ ಡ್ರಮ್‌ಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಆಗುತ್ತದೆ ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಸ್ತಂಭಾಕಾರದ ಎಣ್ಣೆ ಡ್ರಮ್ಮಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ $(d) = 2$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.




ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ಮೀ.

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಎಣ್ಣೆ ಡ್ರಮ್ಮಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2 \times \pi r(r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1 + 7)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$

$$= \frac{352}{7} \text{ (ಮೀಟರ್)}^2 = 50.28 \text{ ಮೀ}^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಡ್ರಮ್ಮಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 50.28 \text{ (ಮೀಟರ್)}^2$

1ಚ.ಮೀ. ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು = ₹3.

$\therefore$ 10 ಡ್ರಮ್ಮುಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು $= 50.28 \times 3 \times 10$

ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು = ₹1508.40

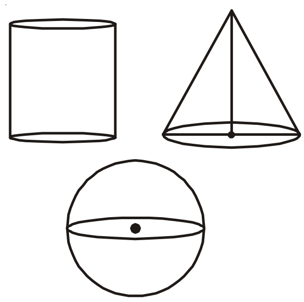
**ಉದಾಹರಣೆ-3.** ಒಂದು ಗೋಳ, ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ, ಒಂದು ಶಂಕು ಒಂದೇ ಎತ್ತರ ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವೆಷ್ಟು ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಗೋಳ, ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಗೋಳದ ಎತ್ತರ = ವ್ಯಾಸ = $2r$.

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಎತ್ತರ = ಗೋಳದ ಎತ್ತರ.

$= 2r$.



ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ $= \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$

$\because$ $S_1$ = ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\pi r^2$

$S_2$ = ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

$S_3$ = ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl = \pi r \times \sqrt{5}\, r = \sqrt{5}\, \pi r^2$

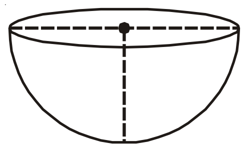
$\therefore$ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ $= S_1 : S_2 : S_3$

$\therefore$ $S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\, \pi r^2$

$= 4 : 4 : \sqrt{5}$

**ಉದಾಹರಣೆ-4.** ಒಂದು ಕಂಪೆನಿ ತೆಳುವಾದ ಉಕ್ಕಿನ ಷೀಟ್‌ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 1000 ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಬೇಸಿನ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದೆ. ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರ ಬೇಸಿನ್ನಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ 1000 ಬೇಸಿನ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಉಕ್ಕು ಷೀಟಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಬೇಸಿನ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ (r) = 21 ಸೆಂ.ಮೀ.



ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= 2772 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^2$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಬೇಸಿನ್ನಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2772$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$.

1 ಬೇಸಿನ್ ತಯಾರಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಉಕ್ಕಿನ ಷೀಟ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2772$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

1000 ಬೇಸಿನ್‌ಗಳ ತಯಾರಿಕೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಉಕ್ಕು ಷೀಟ್‌ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2772 \times 1000$

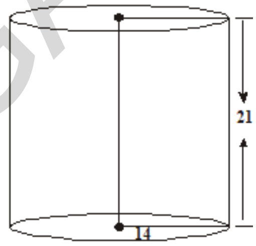
$= 2772000$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

$= 277.2$ (ಮೀ.)$^2$

**ಉದಾಹರಣೆ-5.** ಒಂದು ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 21ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ii) ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (iii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (iv) ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

**ಪರಿಹಾರ :** ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ (r) = 14 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ (h) = 21 ಸೆಂ.ಮೀ.




ಈಗ (i) ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi r^2 = \frac{22}{7}(14)^2 = 616$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

(ii) ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21 = 1848$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$.

(iii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=$ $2 \times$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2 \times 616 + 1848 = 3080$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$.

(iv) ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $= \pi r^2 h =$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ

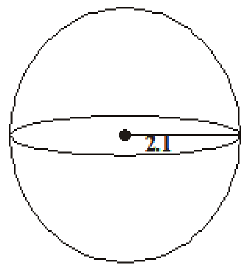
$= 616 \times 21 = 12936$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$.

**ಉದಾಹರಣೆ-6.** 2.1ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. $\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\left.\right]$

**ಪರಿಹಾರ :** ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ($r$) = 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (2.1)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \frac{21}{10}$$




$= \frac{1386}{25} = 55.44$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

$\therefore$ ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^3.$$

**ಉದಾಹರಣೆ-7.** ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

**ಪರಿಹಾರ :** ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $(r)$ = 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. = $\frac{7}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.


ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^3$$

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} = 115.5 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^2$$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.1

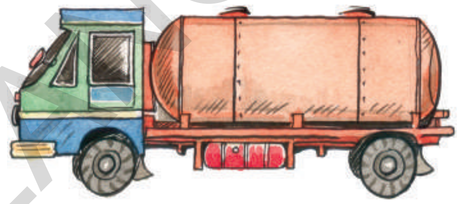
1. ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ವಿದೂಷಕನ ಟೋಪಿಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಈ ಅಳತೆಯ 10 ಟೋಪಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ರಟ್ಟಿನ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?
2. ಕ್ರೀಡಾ ಪರಿಕರಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವ ಕಂಪೆನಿ ಷಟಿಲ್‌ಕಾಕ್‌ಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಇಡಲು 100 ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಕಾಗದದ ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದೆ. ಸ್ತಂಭಾಕಾರದ ಡಬ್ಬಿಯ ಅಳತೆಗಳು 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ/ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ 100 ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು ?
3. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 6 ಸೆಂ.ಮೀ., 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ವಿರುವ ನೇರ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ. ಎರಡರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವೆಷ್ಟು ?
5. ಒಂದು ಸ್ವಯಂ ಸಹಾಯಕ ಬೃಂದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿದ್ದು ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಜೋಕರ್ ಟೋಪಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದೆ. 1000 ಸೆಂ.ಮೀ.$^2$ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದ ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಇದರಿಂದ ಎಷ್ಟು ಟೋಪಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಲ್ಲರು.
6. ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಶಂಕು ಸಮ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತ 3:1 ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
7. ಸ್ತಂಭಾಕಾರವಾಗಿರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡ್ಡಿಯ ಎತ್ತರ 11 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಇಂತಹ 50 ಕಬ್ಬಿಣ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

8. ಒಂದು ಧಾನ್ಯದ ರಾಶಿಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 12 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 8 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು? ಆ ಧಾನ್ಯದ ರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಚ್ಚಲು ಬೇಕಾದ ಕ್ಯಾನ್‌ವ್ಯಾಸ್ ಬಟ್ಟೆ ಎಷ್ಟು? ($\pi = 3.14$ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

9. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 4070 ಸೆಂ.ಮೀ.$^2$ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸ 70 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 10.2 ಘನಾಕೃತಿ ಜೋಡಣೆಗಳ ಮೇಲೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು
## (SURFACE AREA OF THE COMBINATION OF SOLIDS )

ನಾವು ಪ್ರತಿನಿತ್ಯ ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಪರಿಸರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಸಮುದಾಯವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ವಸ್ತುಗಳು, ಗೃಹೋಪಕರಣ ಗಳು, ಮಾತ್ರೆಗಳು, ಸೀಸೆಗಳು, ಆಯಿಲ್ ಟ್ಯಾಂಕರ್‌ಗಳು ಮೊದಲಾದವು. ನಾವು ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ತಿನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅದು ಯಾವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆಯೋ ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ ? ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಘನಾಕೃತಿಗಳಿವೆಯೋ , ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕೋನ್ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಆಕೃತಿಗಳ ಸಮುದಾಯ.

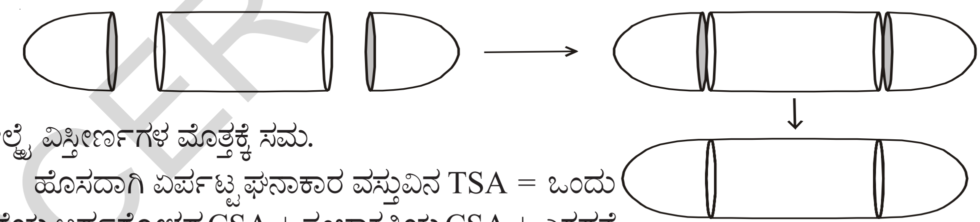


ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಆಯಿಲ್ ಟ್ಯಾಂಕರ್ ಇಲ್ಲವೇ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕರ್ ಒಂದೇ ಮೂಲ ಆಕೃತಿ ಹೊಂದಿದ ವಸ್ತುವೇ ? ನೀವು ಜಾಗ್ರತೆಯಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಟ್ಯಾಂಕರ್ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಅದರ ಕೊನೆಗಳು ಅರ್ಧಗೋಳಾ ಕೃತಿಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲೆ ಉದಾಹರಿಸಿದ ವಸ್ತುಗಳ ಹಾಗೆ ಇರುವ ವಸ್ತುಗಳು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನಾಗಲೀ, ಘನಫಲವನ್ನಾಗಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದರೆ ನಾವು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು. ಇವುಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ವಿಧವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾರೆವು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಆಯಿಲ್ ಟ್ಯಾಂಕರ್ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಸಮೂಹ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅರ್ಧಗೋಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ

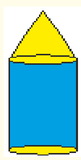


ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಘನಾಕಾರ ವಸ್ತುವಿನ TSA = ಒಂದು ಕೊನೆಯ ಅರ್ಧಗೋಳದ CSA + ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ CSA + ಎರಡನೆ ಕೊನೆಯ ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ CSA ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

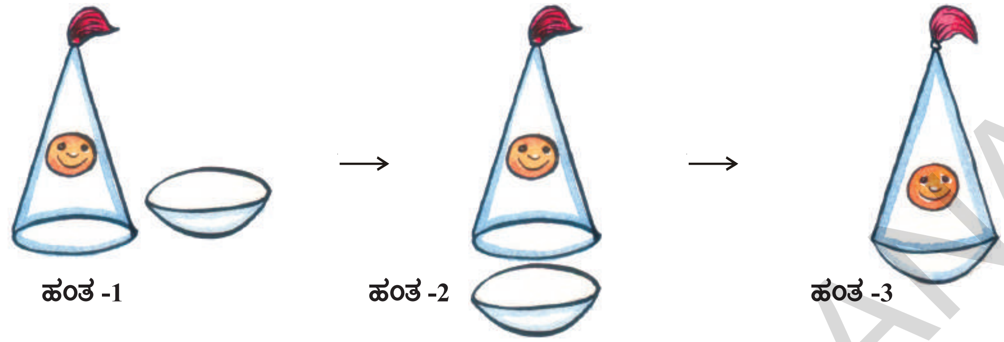
ಇಲ್ಲಿ TSA (Total Surface Area) ಎಂದರೆ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು CSA (Curved Surface Area) ಎಂದರೆ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

**ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ:**



ಸೋಮಿಯ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದಳು. ಶಂಕುವನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟಂತೆ ಇದೆ. ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಅವಳು ಅರ್ಚನಾಗೆ ಆಟಿಕೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಶಂಕು ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳವೆಂದು ಹೇಳಿದಳು ಇದನ್ನು ನೀವು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಆತನು ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹಂತಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿರುತ್ತವೆ.




ಕೊನೆಗೆ ದುಂಡಾಗಿರುವ ತಳಭಾಗವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಆಟದ ಗೊಂಬೆ ತಯಾರಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಈ ಆಟದ ಗೊಂಬೆಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲು ಬೇಕಾದ ಬಣ್ಣದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಈ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರ ಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ

ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧಗೋಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

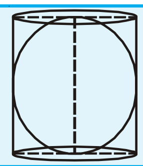
**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

- ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದ ಕೆಲವು ಘನಾಕಾರ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎರಡು ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ನಿಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸುವ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಆಕಾರಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

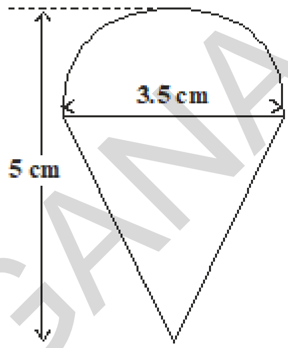
[**ಸೂಚನೆ** : ಜೇಡಿಮಣ್ಣು, ಚೆಂಡುಗಳು, ಪೈಪುಗಳು, ಕಾಗದದ ಶಂಕುಗಳು, ಘನ, ಆಯತಘನದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ]

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೋಳ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಸ್ಥಂಭದ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು? ಸ್ಥಂಭದ ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಘನಫಲಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು? ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ?



**ಉದಾಹರಣೆ-8.** ಕೌಶಿಕನು ತನ್ನ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನ ಬಹುಮಾನವಾಗಿ ಒಂದು ಬುಗುರಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆತನು ಅದಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಾಕಬೇಕೆಂದಿದ್ದಾನೆ. ಒಂದು ಶಂಖುವಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಇಟ್ಟು ಸಂಯೋಗಮಾಡಿದುದರಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಬುಗಿರಿ ಇದೆ. ಬುಗುರಿಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ಅರ್ಧಗೊಳ ವ್ಯಾಸಾರ್ಧವು 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆತನು ಬಣ್ಣ ಹಾಕಬೇಕಾದ ಪ್ರದೇಶದ ವೈಶಾಲ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳೋಣ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.)




**ಸಾಧನೆ :** ಈ ಬುಗುರಿಯು ಸಮಾನ ಭೂವ್ಯಾಸಾರ್ಧಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಅರ್ಧಗೋಳ ಮತ್ತು ಶಂಖುವಿನ ಸಂಯೋಗದಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಅಂದರೆ ಬುಗುರಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ತಳ ವೈಶಾಲ್ಯವು =

ಅರ್ಧಗೋಳ ವಕ್ರತಳ ವೈಶಾಲ್ಯ + ಶಂಖುವಿನ ವಕ್ರತಳ ವೈಶಾಲ್ಯ

ಈಗ, ಅರ್ಧಗೋಳ ವಕ್ರತಳ ವೈಶಾಲ್ಯ

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi r^2\right) = 2\pi r^2$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ($\because$ ಅರ್ಧಗೋಳ ವ್ಯಾಸಾರ್ಧ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ.)

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಶಂಖುವಿನ ಎತ್ತರ = ಬುಗುರಿಯ ಎತ್ತರ – ಅರ್ಧಗೋಳ ಎತ್ತರ (ಅರ್ಧಗೋಳ ವ್ಯಾಸಾರ್ಧ)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) = 3.25$$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದುದರಿಂದ ಶಂಖುವಿನ ಎತ್ತರ

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7$$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಶಂಖುವಿನ ವಕ್ರತಳ ವೈಶಾಲ್ಯ $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಬುಗುರಿಯ ಸಂಪೂರ್ಣ ತಳ ವೈಶಾಲ್ಯವು $= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)+\left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}(3.5+3.7)$$

$$= \frac{11}{2}\times(3.5+3.7)$$

$= 39.6$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (ಸುಮಾರಾಗಿ)

**ಉದಾಹರಣೆ-9.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಕಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ರಾಕೆಟ್ ಮಾದರಿ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿದ ಶಂಕುವಿನ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ರಾಕೆಟ್‌ನ ಎತ್ತರ 26 ಸೆಂ.ಮೀ. ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರ ಭಾಗದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಭಾಗದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಶಂಖಾಕೃತಿ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ, ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಿದರೆ, ಈ ಬಣ್ಣಗಳು ಹಾಕಲು ಬೇಕಾದ ರಾಕೆಟ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)

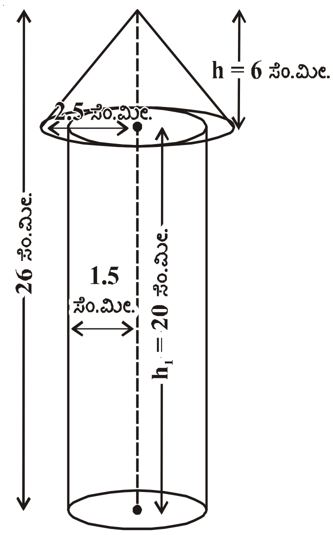
**ಪರಿಹಾರ :** ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಮತ್ತು ಎತ್ತರ '$l$' ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಭಾಗದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r_1$ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ $h_1$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನಮಗೆ,

$r = 2.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.., $h = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$r_1 = 1.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. $h_1 = 20$ ಸೆಂ.ಮೀ.




ಈಗ, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$\Rightarrow \quad l = \sqrt{(2.5)^2 + 6^2}$

$l = \sqrt{6.25+36} = \sqrt{42.25} = 6.5$

ಈಗ, ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi rl$

$= 3.14 \{2.5 \times 6.5\}$

$= 51.025$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಾಲಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi r_1 h_1 + \pi r_1^2$

$= \pi r_1 (2h_1 + r_1)$

$= 3.14 \times 1.5\ (2\times20+1.5)$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

$= 3.14 \times 1.5 \times 41.5$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

$= 4.71 \times 41.5$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

$= 195.465$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$.

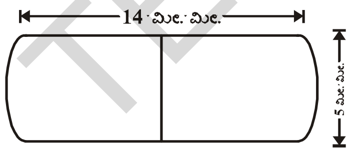
ಆದ್ದರಿಂದ ಹಳದಿ ಬಣ್ಣ ಹಾಕಲಾದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 195.465 (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^2$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.2

1. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮರದ ಆಟಿಕೆಯೊಂದನ್ನು ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆಟಿಕೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು? [$\pi$ = 3.14ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

2. ಒಂದು ಘನಾಕಾರ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಬದಿ ಅರ್ಧಗೋಳ, ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರ ಹೊಂದಿದ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ಎರಡರ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯ 8ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಸಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರಗಳ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. [$\pi$ = 3.14ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ]

3. ಒಂದು ಮಾತ್ರೆಯ ಎರಡು ಕೊನೆಗಳು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಂತಿದೆ. ಮಾತ್ರೆಯ ಉದ್ದ 14 ಮಿ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅಗಲ 5ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

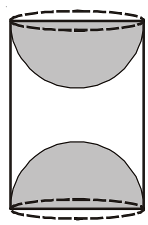



4. 64 (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$ ಘನಫಲವುಳ್ಳ ಎರಡು ಘನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಹೊಸ ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು ?

5. ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರನ್ನು ಶೇಖರಿಸುವ ಟ್ಯಾಂಕಿನ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಿಲಿಂಡರ್ ಭಾಗದ ಹೊರ ವ್ಯಾಸವು 1.4 ಮೀಟರ್‌ಗಳಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದ 8 ಮೀಟರ್‌ಗಳಿಷ್ಟಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹20 ರಂತೆ ಹೊರಗಡೆ ಬಣ್ಣ ಬಳೆಯಲು ತಗುಲುವ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?

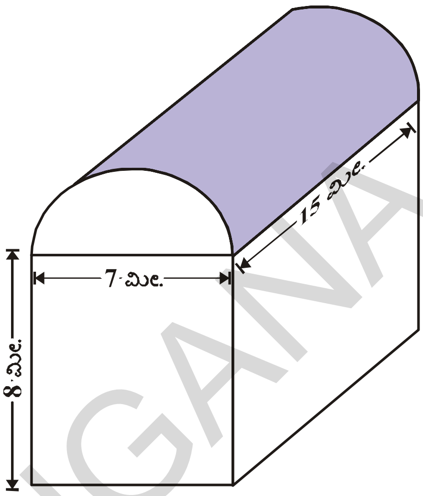
6. ಒಂದು ಘನಾಕಾರ ಕಟ್ಟಿಗೆ ದಿಮ್ಮಿಯಿಂದ ಅದರ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮ ಉದ್ದ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಉಳಿದ ಕಟ್ಟಿಗೆ ದಿಮ್ಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಂದ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗವನ್ನು ತೊಲಗಿಸಿದ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ?



## 10.3 ಘನಾಕೃತಿ ಜೋಡಣೆಗಳ ಘನಫಲ (Volume of Combination of Solids)

ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಜೋಡಣೆಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.




ಸುರೇಶ್ ನಡೆಸುತ್ತಿರುವ ಫ್ಯಾಕ್ಟರೀ ಒಂದು ಆಯತ ಘನ ಮೇಲೆನಿಂತ ಅರ್ಧಭಾಗ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ಫ್ಯಾಕ್ಟರಿಯ ಪಾದದ ಅಳತೆಗಳು 7ಮೀ. $\times$15 ಮೀ. ಮತ್ತು ಆಯತ ಘನದ ಎತ್ತರ 8 ಮೀಟರ್‌ಯಾಗಿವೆ. ಆ ಷೆಡ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಿ ? ಷೆಡ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಯಂತ್ರ ಸಾಮಗ್ರಿ 300 ಮೀ.$^3$ ಘನಫಲವನ್ನು, ಅದರಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ 20 ಮಂದಿ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ 0.08 ಮೀ.$^3$ ಘನಫಲವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿದರೆ ಆ ಷೆಡ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಗಾಳಿ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು ?

ಷೆಡ್ ಒಳಗೆ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ (ಯಂತ್ರಭಾಗಗಳು, ಕಾರ್ಮಿಕರು ಇಲ್ಲ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ) ಆಯತಘನದಲ್ಲಿನ ಗಾಳಿಯ ಘನಫಲ, ಅರ್ಧಭಾಗ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಗಾಳಿ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆಯತ ಘನದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 15 ಮೀ.ಗಳು, 7 ಮೀ.ಗಳು ಮತ್ತು 8 ಮೀ.ಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಅರ್ಧಭಾಗ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 7ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 15 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಬೇಕಾದ ಘನಫಲ = ಆಯತಘನ ಘನಫಲ + $\frac{1}{2}$ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

$$= \left[15\times 7\times 8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times 15\right] \text{ ಘನ ಮೀಟರ್‌ಗಳು}$$

$$= 1128.75 \text{ ಮೀ.}^3$$

ನಂತರ ಯಂತ್ರ ಭಾಗಗಳಿಂದ ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಸ್ಥೂಲ ಘನಫಲ

$$= 300 \text{ ಮೀ.}^3$$

20 ಮಂದಿ ಕಾರ್ಮಿಕರಿಂದ ಆಕ್ರಮಿಸಿದ ಸ್ಥೂಲ ಘನಫಲ

$$= 20\times 0.08 \text{ ಮೀ}^3.$$

$$= 1.6 \text{ ಮೀ.}^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಂತ್ರ ಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ಕಾರ್ಮಿಕರು ಇದ್ದಾಗ ಷೆಡ್‌ನಲ್ಲಿನ ಗಾಳಿಯ

ಘನಫಲ $= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$

$$= 1128.75 - 301.60 = 827.15 \text{ ಮೀ.}^3$$

***ಸೂಚನೆ :*** ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಜೋಡಣೆಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಆ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮ ಅಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೆ ಇರುವ ಕಾರಣ ಕೆಲವು ಮೇಲ್ಮೈಗಳನ್ನು, ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜೋಡಣೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಏಕೀಭವಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಘನಫಲ ಮಾತ್ರವೇ ಆ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿನ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ಒಂದು ತಂತಿಯ ಮಧ್ಯಚ್ಛೇದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಶೇಕಡಾ 5%ರಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದಿರುವುದಕ್ಕೆ ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಶೇಕಡ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೋ ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ ?
2. ಗೋಳ ಮತ್ತು ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-10.** ಒಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನೇರ ಶಂಕು ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಆಟ ವಸ್ತುವಿನ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಸ 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ., ಸ್ತಂಭಾಕಾರ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 7 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಾದರೆ ಘನಾಕಾರ ಆಟ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\left.\right]$

**ಪರಿಹಾರ :** ಶಂಕಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ $h_1 = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ $h_2 = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ತ್ರಿಜ್ಯ $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆಟ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲ

= ಶಂಕಾಕೃತಿ ಆಕಾರ ಭಾಗದ ಘನಫಲ + ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಭಾಗದ ಘನಫಲ + ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗದ ಘನಫಲ

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

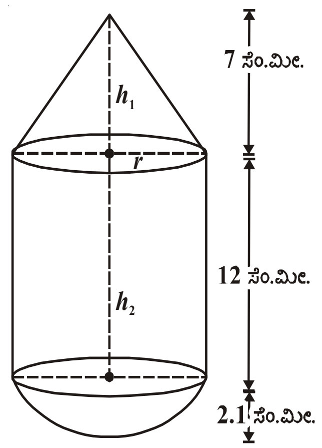
$$= \pi r^2\left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3} \times 7 + 12 + \frac{2}{3} \times \frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{35 + 180 + 21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ)}^3$$



**ಉದಾಹರಣೆ-11.** 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ಸಿಂಡರ್‌ನಾಕೃತಿಯ ಡಬ್ಬದಲ್ಲಿ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ಈ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂನ್ನು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುಗಳಲ್ಲಿ 10 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಹಂಚಬೇಕು. ಈ ರೀತಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಶಂಕುಗಳ ಎತ್ತರವು, ಪಾದದ ವ್ಯಾಸದ ಎರಡಷ್ಟಿದೆ. ಆಗಿದ್ದರೆ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಶಂಕಾಕೃತಿ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ = $x$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

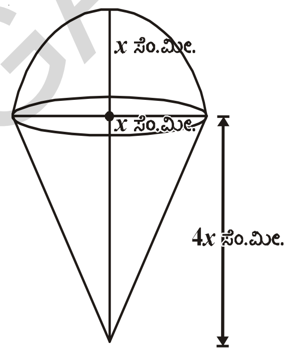
$\therefore$ ವ್ಯಾಸ = $2x$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆಗ ಅದರ ಎತ್ತರ

= 2 (ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ) = $2(2x) = 4x$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಕೋನಿನ ಘನಫಲ

= ಶಂಕಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ಘನಫಲ + ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ಘನಫಲ




$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi x^2 (4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$$

$$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$$

= $2\pi x^3$ ಸೆಂ.ಮೀ.$^3$

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯ ವ್ಯಾಸ = 12 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅದರ ಎತ್ತರ ($h$) = 15 ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

$= \pi(6)^2\, 15$

$= 540\pi$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ್ನು ಹಂಚಲಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10

$$\frac{\text{ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ}}{\text{ಒಂದು ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಕೋನಿನ ಘನಫಲ}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$$

$$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = \frac{540}{2\times 10} = 27$$

$\Rightarrow \quad x^3 = 27$

$\Rightarrow \quad x^3 = 3^3$

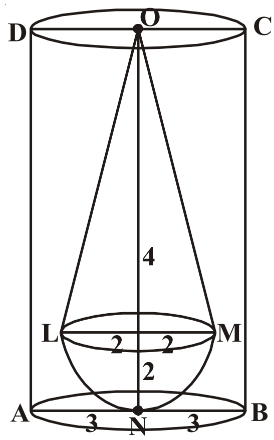
$\Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ ಕೋನಿನ ವ್ಯಾಸ $2x = 2(3) = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ-12.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಿಂತಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕುವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವಂತೆ ಇರುವ ಘನಾಕಾರ ವಸ್ತುವನ್ನು ನೀರಿನಿಂದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ತಳಭಾಗವನ್ನು ತಾಕುತ್ತಿರುವ ಹಾಗೆ ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 4 ಸೆಂ.ಮೀ.ಆಗಿದ್ದರೆ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

$\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\left.\right]$

**ಪರಿಹಾರ:** ABCD ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ, LMN ಅರ್ಧಗೋಳ, OLM ಶಂಕುವನ್ನು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾದ ನೇರ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ವಸ್ತುವನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಿಂದ ಮುಳುಗಿಸಿದರೆ ಹೊರಹೋದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮ.




ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಅರ್ಧಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16}{3}\pi$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16}{3}\pi$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಘನಫಲ $= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$= \frac{32}{3}\pi$

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ವಸ್ತುವಿನಿಂದ ಹೊರ ಹೋದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ

= (ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ) - (ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳ ಘನಫಲ)

= ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $- \frac{32\pi}{3}$

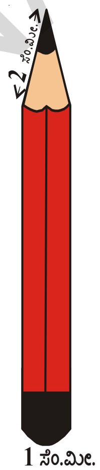
$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$

$= \frac{162\pi - 32\pi}{3} = \frac{130\pi}{3}$

$$= \frac{130}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^3$$

**ಉದಾಹರಣೆ-13.** ಸ್ತಂಭಾಕಾರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬದಿಯನ್ನು ಕೆತ್ತಿ ಆ ಬದಿಯನ್ನು ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ (ಅದರ ಉದ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದೆ), ಪೆನ್ಸಿಲ್ಲಿನ ವ್ಯಾಸ 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಶಂಖಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ ಕೆತ್ತಲಾದ ಭಾಗದ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

$\left(\pi = \frac{355}{113}\right.$ ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ$\left.\right)$




**ಪರಿಹಾರ :** ಪೆನ್ಸಿಲ್ಲಿನ ವ್ಯಾಸ = 1ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪೆನ್ಸಿಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ $(r) = 0.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಶಂಖಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ಉದ್ದ $= h = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ.

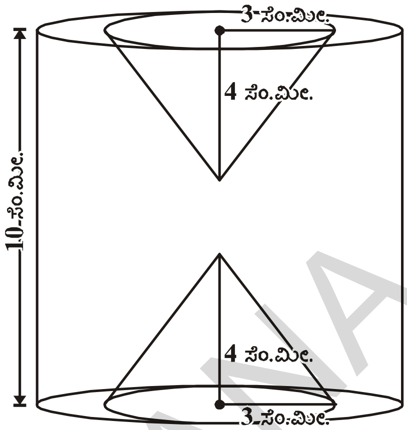
ಕೆತ್ತಲಾದ ಭಾಗದ ಘನಫಲ = ಕೆತ್ತಲಾದ ಭಾಗದ ಘನಫಲ 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ 0.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಘನಫಲ – ಈ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^3 = 1.05 \text{ (ಸೆಂ.ಮೀ.)}^3$$

## ಅಭ್ಯಾಸ -10.3

1. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಕಂಬವು 2.8 ಮೀ. ಎತ್ತರ, 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲೆ 42ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರ ಭಾಗವಿದೆ. ಒಂದು ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಬ್ಬಿಣದ ಭಾರ 7.5 ಗ್ರಾಮುಗಳು ಆದರೆ ಆ ಕಬ್ಬಿಣ ಕಂಬದ ತೂಕವೆಷ್ಟು?
2. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಸಮತಲ ಮೇಲ್ಮೈಮೇಲೆ ನೇರ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಭೂಭಾಗ ಸೇರಿಸುತ್ತಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಆಟ ವಸ್ತುವು ಇದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ಘನಫಲ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ $\frac{3}{2}$ ರಷ್ಟು ಇದೆ. ಶಂಕಾಕೃತಿ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಆಟ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸವರಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right.$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ$\left.\right)$
3. 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹು ಆಗಿರುವ ಘನದಿಂದ ಏರ್ಪಡಿಸಬಲ್ಲ ನೇರ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿ ವಸ್ತುವಿನ ಗರಿಷ್ಟ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?



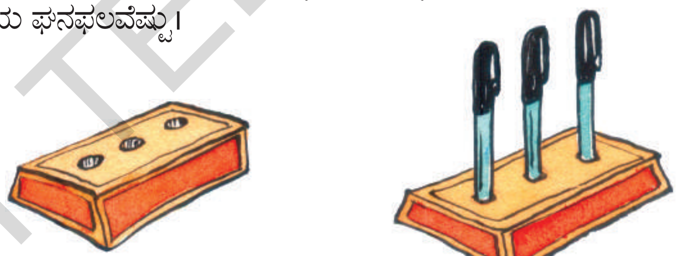

4. ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ತೊಟ್ಟಿ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 9.8 ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿ ನೀರಿನಿಂದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾದ ನೇರ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರುವ ಘನಾಕಾರ ವಸ್ತುವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 5ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\left[\pi = \frac{22}{7}\right.$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\left.\right]$

5. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಒಂದು ಘನಾಕಾರ ಸ್ತಂಭದ ಎರಡು ಕೊನೆಗಳಿಂದ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ, 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುವ ಸಮವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೊಲಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ 10 ಸೆಂ.ಮೀ., ಅದರ ವ್ಯಾಸ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು ?

6. ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಬೀಕರಿನಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ಬೀಕರಿನ ವ್ಯಾಸ 7 ಸೆಂ.ಮೀ., ಅದರೊಳಗೆ 1.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಟದ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಹಾಕಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ 5.6ಸೆಂ.ಮೀ.ವರೆಗೆ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ ?

7. 15 ಸೆಂ.ಮೀ. x 10 ಸೆಂ.ಮೀ. x 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಆಯತ ಘನದಲ್ಲಿ 0.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 1.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಳದಲ್ಲಿ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕುಣಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಪೆನ್ನಿನ ಸ್ಟಾಂಡ್ ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಪೆನ್ನಿನ ಸ್ಟಾಂಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಕಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು ।

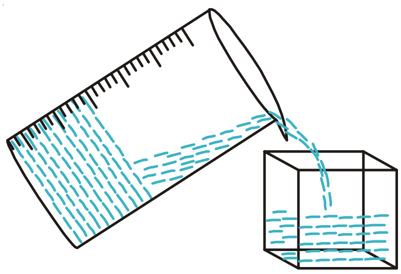


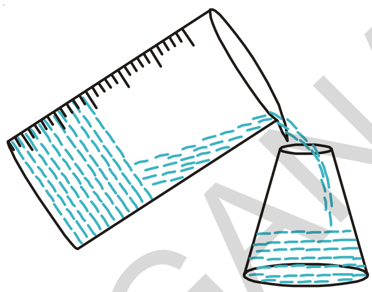
## 10.4 ಒಂದು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಆಕೃತಿಯಾಗಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡುವುದು

### (Conversion of Solid from One Shape to Another)

ಸ್ವಯಂ ಸಹಾಯಕ ಮಂಡಳಿಯವರು (ಡ್ವಾಕ್ರಾಗುಂಪು) ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೇಣದ ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಾಗಿರುವ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಬಂದೂಕುಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುವ ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸೀಸವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ, ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬುಲ್ಲೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಸ್ವರ್ಣಕಾರನು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಂಗಾರದ ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಂಗಾರದ ಆಭರಣಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಘನಫಲದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಸಾಧ್ಯ ? ನಾವು ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕೆಂದರೆ ಅದನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಕರಗಿಸಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಲೋಹದ ಪಾತ್ರೆಗೆ ಸುರಿದಾಗ ಅದರ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೇಣದಬತ್ತಿ ತಯಾರಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸ್ತಂಭಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮೇಣದಬತ್ತಿಯನ್ನು

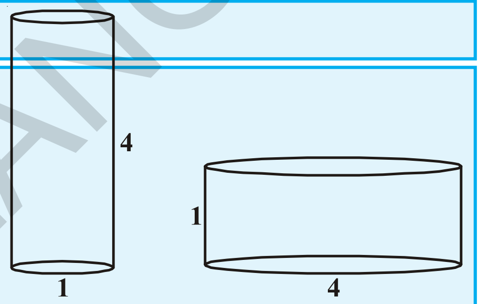
ಕರಗಿಸಿ ಅದನ್ನು ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪಾತ್ರೆಗೆ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ತಂಪಾದ ನಂತರ ನಮಗೆ ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿ ತಯಾರಾಗುತ್ತದೆ. ಹೊಸದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿ ಘನಫಲ ಮೊದಲಿದ್ದ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ನಾವು ಒಂದು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಆಕೃತಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು. ಅಥವಾ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಸಲಾದ ದ್ರವವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ತುಂಬಿ ಭಿನ್ನ ಆಕೃತಿಯನ್ನು, ಭಿನ್ನ ಘನಫಲವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.





**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

ಯಾವ ಪಾತ್ರೆ ಹೆಚ್ಚು ನೀರನ್ನು ತನ್ನಲ್ಲಿ ತುಂಬಿಕೊಳ್ಳ ಬಲ್ಲದು? ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.




ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪುನಶ್ಚೇತರಣೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-14.** 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ, 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ಜೇಡಿಮಣ್ಣಿನ ಮುದ್ದೆ ಇದೆ. ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕ ಅದನ್ನು ಗೋಳವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಆ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲ $\frac{4}{3}\pi r^3$

ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಮಣ್ಣಿನ ಮುದ್ದೆ ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಘನಫಲಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$$r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3 \times 3 \times 3 \times 8$$

$$r^3 = 3^3 \times 2^3$$

$$r = 3 \times 2 = 6$$

$\therefore$ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

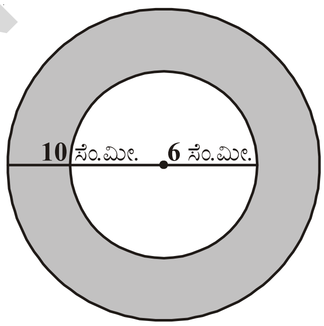
**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

1. 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ, 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ತಾಮ್ರದ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು 18 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದೇ ಮಂದವಾಗಿರುವ ತಂತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯ ಮಂದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಪ್ರವಲ್ಲಿಯ ಮನೆಯ ಮೇಲಿರುವ ವಾಟರ್ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಭೂಗರ್ಭದಲ್ಲಿ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಪ್‌ನಿಂದ ನೀರನ್ನು ,ಮೋಟಾರು ಸಹಾಯದಿಂದ ವಾಟರ್ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ಗೆ ಕಳುಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಪ್‌ನ ಅಳತೆಗಳು 1.57 ಮೀ. $\times$ 1.44 ಮೀ. $\times$ 9.5 ಮೀ. ವಾಟರ್ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನ ತ್ರಿಜ್ಯ 60 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 95 ಸೆಂ.ಮೀ. ನೀರಿನಿಂದ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಿರುವ ಸಂಪ್‌ನಿಂದ ನೀರನ್ನು ವಾಟರ್‌ಟ್ಯಾಂಕ್‌ಗೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಿಸಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಉಳಿದಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಸಂಪ್ ಮತ್ತು ವಾಟರ್ ಟ್ಯಾಂಕ್‌ಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ ? ($\pi = 3.14$)

**ಉದಾಹರಣೆ-15.** ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಚಿಪ್ಪಿನ ಅಂತರ್, ಬಾಹ್ಯ ವ್ಯಾಸಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದನ್ನು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಸ್ತಂಭಾಕಾರವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಚಿಪ್ಪಿನ ಅರ್ಧಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{10}{2} = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ.= R




ಅಂತರ್ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{6}{2} = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= r$

ಚಿಪ್ಪಿನ ಅರ್ಧಗೋಳ ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ

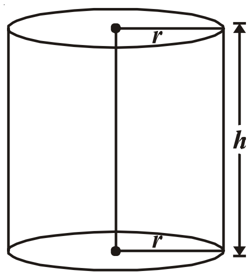
= ಬಾಹ್ಯ ಘನಫಲ - ಅಂತರ್‌ಘನಫಲ

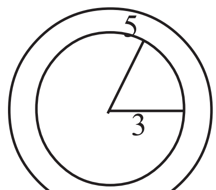
$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$

$= \frac{2}{3}\pi (5^3 - 3^3)$

$= \frac{2}{3}\pi (125 - 27)$




$= \frac{2}{3}\pi \times 98$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$ $= \frac{196\pi}{3}$(ಸೆಂ. ಮೀ.)$^3$ ...(1)

ಚಿಪ್ಪಿನ ಘನದ ಅರ್ಧಗೋಳ, ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಘನವಾಗಿ ಹೊಸ ರೂಪ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡರ ಘನಫಲ ಸಮ.

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಘನದ ವ್ಯಾಸ = 14 ಸೆಂ.ಮೀ. (ಕೊಡಲಾಗಿದೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಘನದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 7 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ = h ಎಂದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore$ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $= \pi r^2 h$

$$= \pi \times 7 \times 7 \times h\ (\text{ಸೆಂ.ಮೀ.})^3 = 49\pi h\ (\text{ಸೆಂ.ಮೀ.})^3 \qquad ...(2)$$

ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಕಾರ

ಚಿಪ್ಪಿನ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ = ಘನ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

$$\frac{196}{3}\pi = 49\pi h \qquad [(1), (2) \text{ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ}]$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3} \text{ ಸೆಂ. ಮೀ.}$$

$\therefore$ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ = 1.33 ಸೆಂ.ಮೀ.

**ಉದಾಹರಣೆ-16.** 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಂತರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದ್ರವವನ್ನು ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ದ್ರವವನ್ನು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಸೀಸೆಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ್ದಾರೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿನ ದ್ರವವನ್ನು ತುಂಬುವುದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸೀಸೆಗಳು ಅವಶ್ಯಕ ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಅರ್ಧಗೋಳ ಘನಫಲ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

ಅರ್ಧಗೋಳ ಆಂತರ್ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ = 15 ಸೆಂ. ಮೀ.

$\therefore$ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾದ ದ್ರವದ ಘನಫಲ

$$= \frac{2}{3}\pi(15)^3\ (\text{ಸೆಂ. ಮೀ.})^3$$

$$= 2250\ \pi\ (\text{ಸೆಂ.ಮೀ.})^3$$

ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸೀಸೆಯ ಎತ್ತರ $(h)$ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸೀಸೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ (R) $= \frac{5}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಸೀಸೆಯ ಘನಫಲ $= \pi R^2 h$

$$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}^3 = \frac{75}{2}\ \pi \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}^3$$

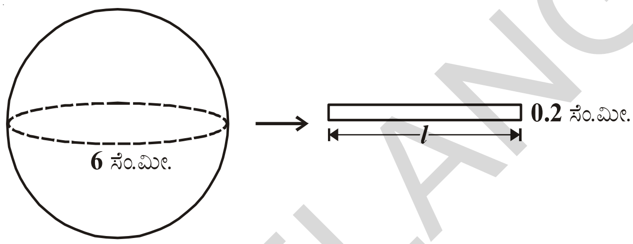
$$\text{ದ್ರವವನ್ನು ತುಂಬುವುದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಸೀಸೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = \frac{\text{ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯ ಘನಫಲ}}{\text{ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಸೀಸೆಯ ಘನಫಲ}}$$

$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2 \times 2250}{75} = 60.$$

**ಉದಾಹರಣೆ-17.** 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಘನದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 0.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮಧ್ಯಚ್ಛೇದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ತಂತಿಯಾಗಿ ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಆ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಘನ ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಘನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ.




ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ತಂತಿಯ ಮಧ್ಯಚ್ಛೇದ ವ್ಯಾಸ = 0.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ತ್ರಿಜ್ಯ = 0.1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ತಂತಿಯ ಉದ್ದ $l$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ತಂತಿಯಾಗಿ ತಯಾರಿಸಿರುವುದರಿಂದ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ತಂತಿಯ ಎತ್ತರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

$\therefore$ ತಂತಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾದ ಲೋಹದ ಘನಫಲ = ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$\pi \times (0.1)^2 \times h = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$$

$$\pi \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times h = \frac{4}{3} \times \pi \times 27$$

$$\pi \times \frac{1}{100} \times h = 36\pi$$

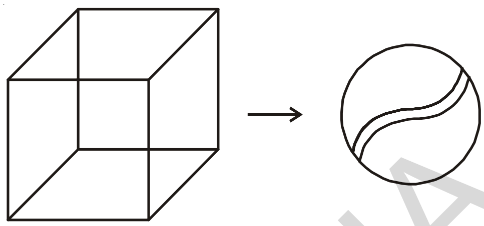
$$h = \frac{36\pi \times 100}{\pi} \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

$= 3600$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= 36$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು

ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = 36 ಮೀಟರ್‌ಗಳು

**ಉದಾಹರಣೆ-18.** 44 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸತುವಿನ (Lead) ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ಗೋಳಾಕಾರ ಚೆಂಡುಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಸತುವಿನ ಘನದ ಬಾಹು = 44 ಸೆಂ.ಮೀ.



ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{4}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ. = 2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2^3$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಸತುವಿನ ಘನವನ್ನು $x$ ಗೋಳಗಳಾಗಿ ತಯಾರು ಮಾಡಿದರೆ $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times x$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

$x$ ಗೋಳಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = ಸತುವಿನ ಘನದ ಘನಫಲ

$\Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times x = (44)^3$

$\Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8 \times x = 44 \times 44 \times 44$

$\Rightarrow x = \frac{44 \times 44 \times 44 \times 3 \times 7}{4 \times 22 \times 8}$

$x = 2541$

ಆದ್ದರಿಂದ ತಯಾರು ಮಾಡಲಾದ ಗೋಳಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2541.

**ಉದಾಹರಣೆ-19.** ಒಂದು ಸ್ವಯಂ ಸಹಾಯಕ ಮಂಡಳಿ (ಡ್ವಾಕ್ರಾ) ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ 66 ಸೆಂ.ಮೀ., 42ಸೆಂ.ಮೀ., 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಮೇಣದ ದಿಮ್ಮಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ, 2.8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ತಯಾರು ಮಾಡಬಲ್ಲ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ?

**ಪರಿಹಾರ :** ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಮೇಣದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಘನಫಲ = $lbh$

$= (66 \times 42 \times 21)$ (ಸೆಂ.ಮೀ.)$^3$

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{4.2}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ. = 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯ ಎತ್ತರ = 2.8 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಯ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7}\times(2.1)^2\times 2.8$$

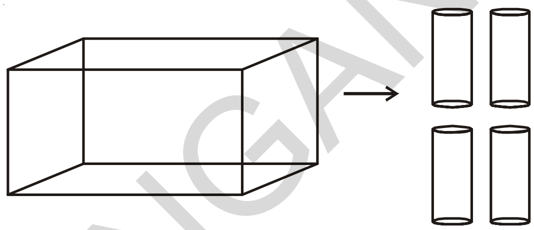
x ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ = $\frac{22}{7}\times 2.1\times 2.1\times 2.8\times x$

$\because$ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳ ಘನಫಲ = ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೇಣದ ದಿಮ್ಮಿಯ ಘನಫಲ

$$\therefore \frac{22}{7}\times 2.1\times 2.1\times 2.8\times x = 66\times 42\times 21$$

$$x = \frac{66\times 42\times 21\times 7}{22\times 2.1\times 2.1\times 2.8}$$

$$= 1500$$



ತಯಾರು ಮಾಡಲಾದ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಮೇಣದ ಬತ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 1500.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.4

1. 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಘನದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಆ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ?
2. 6 ಸೆಂ.ಮೀ., 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರುವ ಘನಗೋಳಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಘನ ಗೋಳವಾಗಿ ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಷ್ಟು ?
3. 20 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಆಳ, 7 ಮೀಟರ್ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಗುಂಡಿಯನ್ನು ತೋಡಿದಾಗ ಬಂದ ಮಣ್ಣನ್ನು 22ಮೀಟರ್ × 14ಮೀಟರ್ ಅಳತೆಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕಂಕಣವಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ?
4. 14 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ವ್ಯಾಸ, 15 ಮೀಟರ್ ಆಳ ಇರುವ ಒಂದು ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಿದಾಗ ಬರುವ ಮಣ್ಣನ್ನು 7ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಅಗಲ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕಂಕಣವಾಗಿ ಏರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?
5. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ, 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್ ಇದೆ. ಅದನ್ನು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ, 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ವಸ್ತು (ಕೋನ್)ವಿನಲ್ಲಿ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ್ನು ತುಂಬಿದರೆ, ಆ ಒಟ್ಟು ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ್ನು ತುಂಬಲು ಬೇಕಾದ ಕೋನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?
6. 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ×10 ಸೆಂ.ಮೀ. × 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಆಯತ ಘನಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು 1.75ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ, 2 ಮಿ.ಮೀ. ಮಂದವಿರುವ ಎಷ್ಟು ಬೆಳ್ಳಿ ನಾಣ್ಯಗಳು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತವೆ ?
7. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆ ಬೋರಲು ಹಾಕಿದ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ 8 ಸೆಂ.ಮೀ., ಮೇಲ್ಭಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಪಾತ್ರೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 0.5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ $\frac{1}{4}$ ರಷ್ಟು ನೀರು ಹರಿದು ಹೊರಗಡೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾದ ಒಟ್ಟು ಘನಗೋಳಾಕೃತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
8. 28 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ $4\frac{2}{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ, 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಏರ್ಪಡುವ ಶಂಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ :

[ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನೂದ್ದೇಶಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ಅಲ್ಲ]

1. 4.1 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಲ್ಫ್ ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ಮೇಲೆ 2 ಮಿ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ 150 ಸಣ್ಣ ಕುಣಿಗಳು (ಡಿಂಪುಲ್) ಇವೆ. ಕುಣಿಗಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$
2. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಳದವರೆಗೆ ನೀರು ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಗೋಳವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ 6.75 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬೆಳೆದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಹಾಕಲಾದ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಷ್ಟು? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$
3. ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿ ಆಟ ವಸ್ತುವು ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿದ್ದು, ಒಂದು ಬದಿ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬದಿ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯಾಸ 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ.,ಸ್ತಂಭಾಕಾರ, ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಭಾಗಗಳ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಘನಾಕಾರ ಆಟ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು? $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$
4. 15 ಸೆಂ.ಮೀ., 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಮೂರು ಲೋಹದ ಘನಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಏರ್ಪಟ್ಟ ಘನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?
5. 36 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂತರ್ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳಾಕಾರ ಪಾತ್ರೆ ದ್ರವದಿಂದ ತುಂಬಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ದ್ರವವನ್ನು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕಾರ ಸೀಸೆ (Bottle) ಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದರೆ, ಒಟ್ಟು ದ್ರವವನ್ನು ತುಂಬಲು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಸೀಸೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

20cm×20cm ಅಳತೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ತೆಳ್ಳನೆ ಕಾಗದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನವಾದ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಮಡಚಿ ಅದನ್ನು ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಆಕಾರಕ್ಕೆ ಮಾಡಿ. ಈ ವಿಧದಿಂದ ತಯಾರಾದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು? ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಮಾಣವುಳ್ಳ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ತಯಾರಿಸಲು ಬಳಸಿದ ಕಾಗದ ಎಷ್ಟು ಮತ್ತು ಅದರ ಮಂದ ಎಷ್ಟು? ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಚೌಕಗಳ ಮಧ್ಯ ಏನು ಸಂಬಂಧ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ.

ಮುಂದುವರೆಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆ : – ಚೌಕ ಕಾಗದದ ಬದಲು ಆಯತಕಾಗದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. ಎರಡು ಘನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಘನದ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲ, ಆ ಎರಡೂ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.
2. ಘನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ಘನ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಆ ಘನ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಅಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಿರುವ ಕಾರಣ ಕೆಲವು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪಭಾಗ ಇವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಕಾಣದೇ ಹೋಗುತ್ತವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ

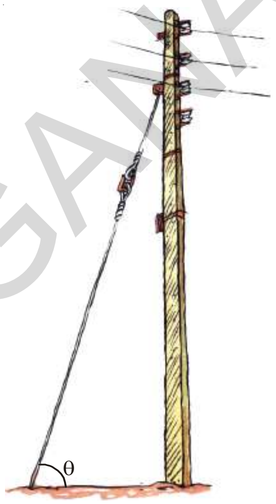
11

# ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

## (Trigonometry)

### 11.1 ಪರಿಚಯ

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.




- ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತ ಇರುವ ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ಥಂಭಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಅವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಲೋಹದ ವೈರ್ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್‌ಸ್ಥಂಭ, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಲೋಹದ ವೈರ್‌ಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, ಒಂದುವೇಳೆ ಲೋಹದ ವೈರ್ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸುವ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆಯೇ?

- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಒಂದು ಗೋಡೆಗೆ ಏಣಿ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಅವನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದರೆ, ಅವನು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು? ಆಗ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಏಣಿ ಹಾಕುವ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ?

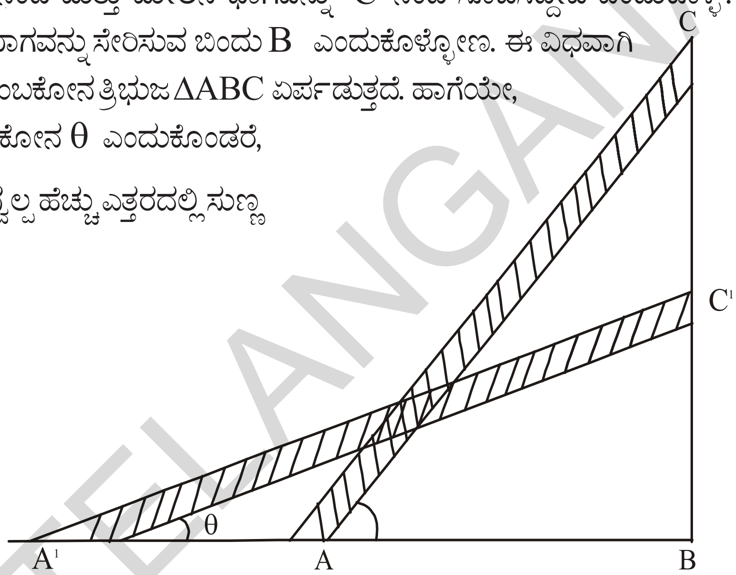

- ಆದಿಲಾಬಾದ್ ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿನ ಜೈನಥ್ ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ 13ನೇ ಶತಾಬ್ಧದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ಒಂದು ಗುಡಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಸೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ ಸೂರ್ಯನಾರಾಯಣಸ್ವಾಮಿ ವಿಗ್ರಹದ ಪಾದಗಳ ಮೇಲೆ ಸೂರ್ಯನ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೆಯ ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು ಬೀಳುತ್ತವೆ. ಗುಡಿಯ ದ್ವಾರದಿಂದ ವಿಗ್ರಹಕ್ಕಿರುವ ದೂರ, ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು ಬರುವ ದ್ವಾರದ ಮೇಲಿರುವ ರಂಧ್ರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಆ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವಿರೇ? ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಆಲೋಚಿಸುತ್ತೀರಾ.

- ಆಟವಾಡುವ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ, ಮಕ್ಕಳು ಜಾರು ಬಂಡಿಯ ಮೇಲೆ ಜಾರುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುತ್ತೀರಿ. ಜಾರುಬಂಡಿ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನವನ್ನಿಡಿದು ಜಾರುವ ಸ್ವಭಾವ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಇರುತ್ತದೆ. ಜಾರುಬಂಡಿ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ ಬದಲಾದರೆ ಏನು ನಡೆಯುತ್ತದೆ? ಆಕೋನ ಅಸಾಧಾರಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಕ್ಕಳು ಆಡಿಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲರೇ?

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಅಥವಾ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದೋ ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಕಟ್ಟಡಗಳ ಎತ್ತರಗಳು, ದೂರಗಳು ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಡುವ ಕೋನಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈ ವಿಧವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗವಾದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಇನ್ನೂ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆ ಏಣಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯುತ್ತಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಏಣಿಯ ಕೆಳ ಭಾಗವನ್ನು A ನಿಂದ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಭಾಗವನ್ನು C ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಗೋಡೆಯ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗ, ಏಣಿಯ ಕೆಳ ಭಾಗವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಬಿಂದು B ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ $\Delta ABC$ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಏಣಿಯು ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನ $\theta$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ,




1. ಆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೋಡೆಯೊಂದಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ,
   - ಏಣಿ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ದಲ್ಲಿ ಎಂತಹ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ?
   - ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ AB ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಎಂತಹ ಬದಲಾ-ವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ?
2. ಆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ,
   - ಏಣಿ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಎಂತಹ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ?
   - ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ AB ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಎಂತಹ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ?

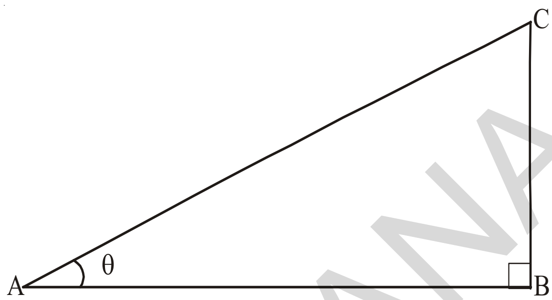
ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆ ಹೆಚ್ಚು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೇ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಸುಣ್ಣ ಬಳಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದರೆ ಆ ಏಣಿಯ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದುವೇಳೆ '$\theta$' ವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆ ಸುಣ್ಣ ಹಾಕುವ ಸ್ಥಾನದ ಎತ್ತರ ಬೆಳೆದು, ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ದೂರ AB ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ ಅಲ್ಲವೇ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ '$\theta$' ಕಡಿಮೆಯಾದಾಗ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆ ಸುಣ್ಣ ಹಾಕುವ ಸ್ಥಾನದ ಎತ್ತರ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ, ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ AB ದೂರ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ನೀವು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಾ?

ಇಲ್ಲಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿಯೇ ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟು ಆ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

### 11.1.1 ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿತೋರಿಸಿದಂತೆ B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle CAB$ ನ್ನು $\angle A$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮತ್ತು $\angle A$ ಒಂದು ಲಘುಕೋನ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AC ಎನ್ನುವುದು ಅತಿದೊಡ್ಡ ಬಾಹು ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು "ಕರ್ಣ" ಆಗುತ್ತದೆ.




ಈ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಬಾಹು BC ಸ್ಥಾನ, $\angle A$. ಆಧಾರವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಇದೆ. $\angle A$ ಗೆ ಬಾಹು BC ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ ಇದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ ಅಲ್ಲವೇ ! ಆದ್ದರಿಂದ BC ಯನ್ನು $\angle$**A** ಗೆ "ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ". ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇನ್ನೂ ಉಳಿದ ಬಾಹು AB ಯನ್ನು $\angle$**A** ಗೆ "ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು" ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

AC = ಕರ್ಣ

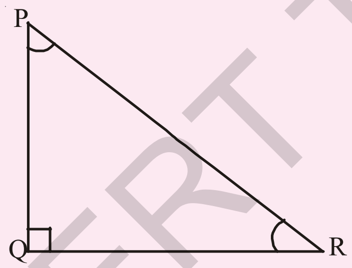
BC = $\angle A$ ದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು

AB = $\angle A$ ದ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು

#### ಇದನ್ನು ಮಾಡಿರಿ

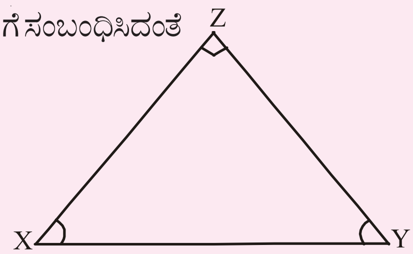
ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ "ಕರ್ಣ", "ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು " ಮತ್ತು "ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು" ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಕೋನ R ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ



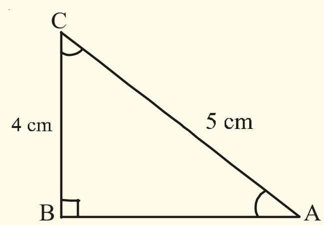

2. (i) ಕೋನ X ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ

(ii) ಕೋನ Y ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ




#### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ "ಕರ್ಣ", "ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು " ಮತ್ತು "ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು" ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




1. ಕೋನ C ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ
2. ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ

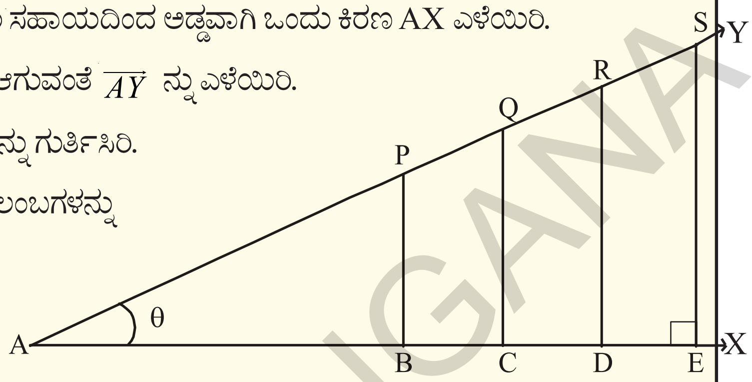
ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? A ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು C ಕೋನದ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುವಿಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ? ಇನ್ನೂ, ಬಲವಾದ ಲೋಹದ ವೈರ್ ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸ್ಥಂಭದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವೈರ್‌ನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ಇದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಾ? ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿರಿಸಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

## 11.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನೂ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು, ಅವು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿವೆಯೇ ನೋಡೋಣ.

### ಚಟುವಟಿಕೆ

1. ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸ್ಕೇಲು ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಡ್ಡವಾಗಿ ಒಂದು ಕಿರಣ AX ಎಳೆಯಿರಿ.
2. $\angle YAX$ ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆಗುವಂತೆ $\overrightarrow{AY}$ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
3. AY ನ ಮೇಲೆ P, Q, R, S ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.
4. AX ಗೆ PB, QC, RD, SE ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
5. AB, AC, AD, AE, AP, AQ, AR, AS, PB, QC, RD, SE ಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.




| ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ | ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ | ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ | ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು / ಕರ್ಣ | ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು / ಕರ್ಣ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

$\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ ಕರ್ಣ $\frac{ES}{AS}$ ಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಮಗೆ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಫಲಿತ $\frac{4}{5}$ ಬಂದಿದೆಯೇ ?

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ, $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ ಮತ್ತು $\frac{AE}{AS}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ? ಏನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ?

## 11.2.1 ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ABP, ACQ, ADR ಮತ್ತು AES ಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನ A ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ. $\angle$B, $\angle$C, $\angle$D ಮತ್ತು $\angle$E ಲಂಬಕೋನಗಳು ಮತ್ತು $\angle$P, $\angle$Q, $\angle$R ಮತ್ತು $\angle$S ಗಳು ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ABP, ACQ, ADR ಮತ್ತು AES ಗಳು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ A ನ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ, ಮತ್ತು ಉಳಿದ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇರುವುದೆಂದು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅಲ್ಲವೇ! ಈ ವಿಧವಾಗಿ $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ ಮತ್ತು $\frac{ES}{AS}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು **"sine A"** ಇಲ್ಲವೇ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ **"sin A"** ಎನ್ನುಬಹುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ $\angle$A ಬೆಲೆ "$x$" ಆದರೆ ಅದನ್ನು "sin $x$" ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಸಮರೂಪ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಲಂಬಕೋನ ಅಲ್ಲದ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಆ ಕೋನದ *"sin"* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

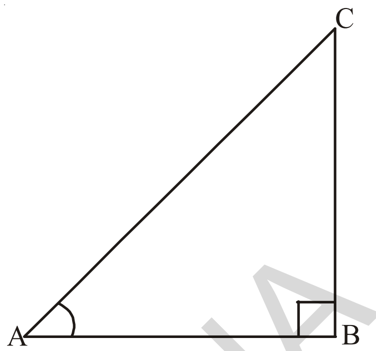
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ ಮತ್ತು $\frac{AE}{AS}$, ಅನುಪಾತಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇವು $\angle$A ನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಅನುಪಾತಗಳು $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ ಮತ್ತು $\frac{AE}{AS}$ ಗಳನ್ನು **'cosine A'** ಇಲ್ಲವೇ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ **'cos A'** ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ A ಬೆಲೆ "$x$" ಆದರೆ ಅದನ್ನು "cos $x$" ಎಂದುಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ವಿಧವಾಗಿ " ಸಮರೂಪಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಲಂಬಕೋನವಲ್ಲದ ಒಂದು ಕೋನದ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ." ಮತ್ತು ಆ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಆ ಕೋನದ *"cos"* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇನ್ನೂ ಸಮರೂಪಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಲಂಬಕೋನವಲ್ಲದ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಆ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಆ ಕೋನದ *"tangent"* ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಅನುಪಾತಗಳು

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದರಲ್ಲಿ $\angle$A ನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

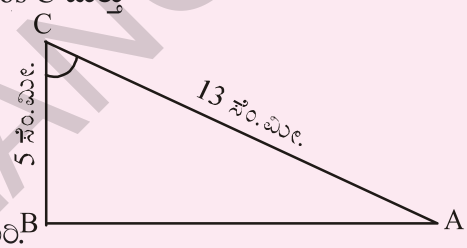



$\angle A$ ದ sine $= \sin A = \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ}} = \dfrac{BC}{AC}$

$\angle A$ ದ cosine $= \cos A = \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle A$ ದ tangent $= \tan A = \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}} = \dfrac{BC}{AB}$

## ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :




1. ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ (i) sin C (ii) cos C ಮತ್ತು (iii) tan C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ XYZನಲ್ಲಿ, $\angle Y$ ಲಂಬಕೋನ ಮತ್ತು, XZ = 17 ಸೆಂ.ಮೀ. , YZ = 15 ಸೆಂ.ಮೀ.
   (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ತ್ರಿಭುಜ PQR ನಲ್ಲಿ Q ಲಂಬಕೋನ ಮತ್ತು $\angle P$ ಬೆಲೆ $x$, PQ = 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು QR = 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ,ಆದರೆ $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ C ಲಂಬಕೋನ. BC + CA = 23 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು BC – CA = 7ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ sin A ಮತ್ತು tan B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬೆಲೆ $x$ ಗೆ $\sin x = \dfrac{4}{3}$ ಸಾಧ್ಯವೇ? ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಹೇಳುವಿರಾ ?

(ii) sin A ಮತ್ತು cos A ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಏಕೆ?

(iii) tan A ಅಂದರೆ tan ಮತ್ತು A ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ಅನುಪಾತಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮಗಳ ಮೂರು ಅನುಪಾತಗಳಿವೆ.

"sine A" ನ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ "cosecant A" ಇಲ್ಲವೇ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ "cosec A"

i.e., $\text{cosec } A = \dfrac{1}{\sin A}$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ "cos A" ನ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ secant A" (ಇಲ್ಲವೇ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ "sec A") ಮತ್ತು "tan A" ಯ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಲೋಮ "cotangent A (ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ cot A)

i.e., $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ ಮತ್ತು $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

ಬಾಹುಗಳ ಅನುಗುಣವಾಗಿ 'cosec' ಅನುಪಾತವನ್ನು ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು?

ಹಾಗೆಯೇ $\sin A = \dfrac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ , ಆದರೆ

$\text{cosec } A = \dfrac{\text{ಕರ್ಣ}}{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}$

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

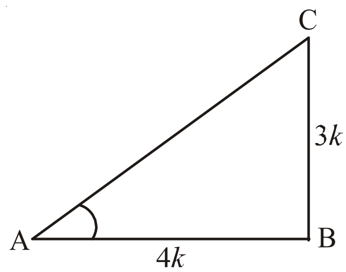
sec A ಮತ್ತು cot A ಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಏನಾಗುತ್ತವೆ ?

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

- $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ ಬೆಲೆ tan A ಆಗುವುದೇ ?
- $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ ಬೆಲೆ cot A ಆಗುವುದೇ ?

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** $\tan A = \dfrac{3}{4}$, ಆದರೆ ಕೋನ A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




**ಪರಿಹಾರ :** $\tan A = \dfrac{3}{4}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತೆ $\tan A = \dfrac{\text{ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}} = \dfrac{3}{4}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು : ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು = 3:4

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋನ A ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು = BC = $3k$ ($k$ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ )

ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು = AB = $4k$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ,

ಪೈಥಾಗರೋಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $\Delta$ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2$$

$$AC = \sqrt{25k^2}$$

ಕರ್ಣ $AC = 5k$

ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

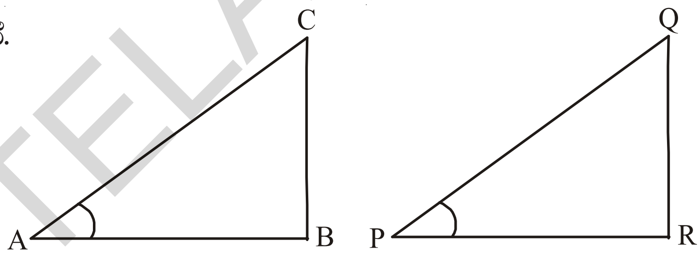
$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $\cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$

ಹಾಗೆಯೇ $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$.

**ಉದಾಹರಣೆ -2.** $\sin A = \sin P$ ಆಗುವಂತೆ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle P$ ಗಳು ಲಘು ಕೋನಗಳು ಆದರೆ $\angle A = \angle P$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^0$ ಮತ್ತು $\Delta PQR$ ನಲ್ಲಿ $\angle R = 90^0$

$\sin A = \sin P$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.




$\Delta ABC$ ಯಿಂದ $\sin A = \frac{BC}{AC}$

$\Delta PQR$ ನಿಂದ $\sin P = \frac{QR}{PQ}$

ಆದರೆ (1)ಮತ್ತು (2)ಗಳಿಂದ $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{AC}{PQ} \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{AC}{PQ} \text{ ((1)ರಿಂದ)}$$

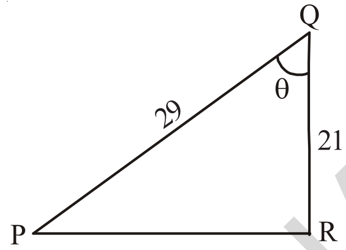
ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$ ಆದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \angle A = \angle P$

**ಉದಾಹರಣೆ -3.** P ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PQR ನಲ್ಲಿ PQ = 29 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, QR = 21 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು $\angle PQR = \theta$ , ಆದರೆ

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ ಮತ್ತು (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

**ಪರಿಹಾರ :** $\Delta$ PQR ನಲ್ಲಿ




$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{400} = 20 \text{ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು (ಏಕೆ)}$$

$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

ಇನ್ನೂ (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = \frac{841}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441-400}{841} = \frac{41}{841}$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

1. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ $\Delta$ABC ಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು AB, BC ಮತ್ತು CA ಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 17 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ sin A, cos A ಮತ್ತು tan A ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಲಂಬಕೋನ $\Delta$ PQR ನಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳು PQ = 7 ಸೆಂ.ಮೀ. QR = 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle P = 90^o$ ಆದರೆ, tan Q – tan R ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಲಂಬಕೋನ $\Delta$ABC ಯಲ್ಲಿ $a$ = 24 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು , $b$ = 25 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು $\angle BAC = \theta$ ಆದರೆ cos θ ಮತ್ತು tan θ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\cos A = \frac{12}{13}$ ಆದರೆ sin A ಮತ್ತು tan A ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. 3 tan A = 4 ಆದರೆ sin A ಮತ್ತು cos A ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. cos A = cos X ಆಗುವಂತೆ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle X$ ಲಘುಕೋನಗಳಾದರೆ $\angle A = \angle X$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\cot\theta = \frac{7}{8}$ ಆದರೆ (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ $\tan A = \sqrt{3}$ ಆದರೆ

   (i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C – sin A sin C ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 11.3 ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

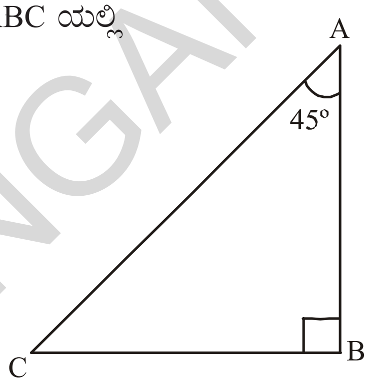
ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಲಂಬಕೋನ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು $30^o$, $60^o$ , $90^o$ ಕೋನಗಳು ಹೊಂದಿದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕುರಿತು ಗೊತ್ತು.

ನಾವು $\sin 30^o$ ಅಥವಾ $\tan 60^o$ ಅಥವಾ $\cos 45^o$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದೇ?

$\sin 0^o$ ಅಥವಾ $\cos 0^o$ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತವೆಯೇ?

### 11.3.1 45° ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

B ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಲಂಬಕೋನ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ




$\angle A = \angle C = 45^o$ (ಏಕೆ?) ಮತ್ತು $BC = AB$ (ಏಕೆ ?)

$BC = AB = a$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಪೈಥಾಗರೋಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= a^2 + a^2 = 2a^2$,

$AC = a\sqrt{2}$

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳ ಪ್ರಕಾರ

$$\sin 45^o = \frac{45^o \text{ ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

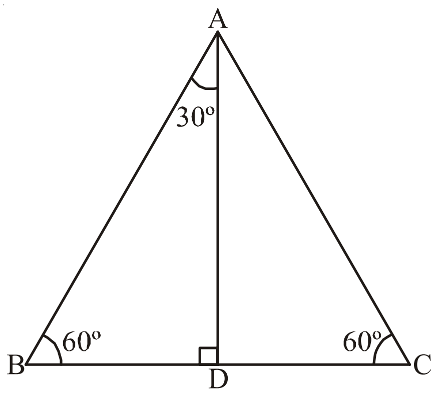
$$\cos 45^o = \frac{45^o \text{ ಕೋನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{45^o \text{ ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು}}{45^o \text{ ಕೋನದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $\operatorname{cosec} 45^o$, $\sec 45^o$ ಮತ್ತು $\cot 45^o$.

### 11.3.2 30° ಮತ್ತು 60° ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು $30^o$ ಮತ್ತು $60^o$ ಆಧರಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ! ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯು ವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು, ಅದನ್ನು $30^o$, $60^o$ ಮತ್ತು $90^o$ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



ಒಂದು ಸಮಬಾಹು $\Delta ABC$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕೋನವು $60^o$ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^o$ ಮತ್ತು $AB = BC = CA = 2a$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ BC ಗೆ A ಯಿಂದ AD ಲಂಬವನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ಲಂಬ AD ಕೋನ A"ಕೋನಾರ್ಧರೇಖೆ" ಯಾಗಿ ಮತ್ತು ಬಾಹು BC ಯ "ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆ" ಯಾಗಿಯೂ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle BAD = \angle CAD = 30^o$ .

BC ಯನ್ನು D ಬಿಂದು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ

$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು .

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABD ಯಲ್ಲಿ

$AB = 2a$ ಮತ್ತು $BD = a$ ಯೂನಿಟಿಟ್‌ಗಳು

ಆಗ $AD^2 = AB^2 - BD^2$ by (ಪೈಥಾಗರೊಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ)

$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $AD = a\sqrt{3}$

ಹಾಗೆಯೇ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳ ಅನುಗುಣವಾಗಿ

$$\sin 60^o = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ $60^o = \sqrt{3}$ (ಏಕೆ?)

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ನಾವು cosec $60^o$, sec $60^o$ ಮತ್ತು cot $60^o$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಹೇಳಬಹುದು.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ.**

cosec $60^o$, sec $60^o$ ಮತ್ತು cot $60^o$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

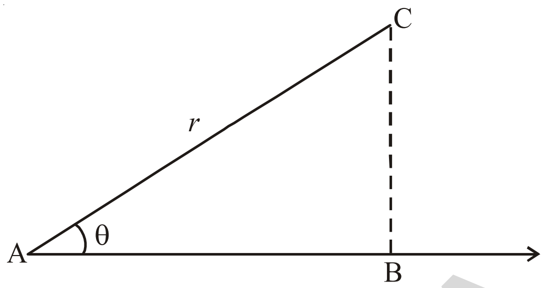
**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

sin $30^o$, cos$30^o$, tan $30^o$, cosec $30^o$, sec$30^o$ ಮತ್ತು cot $30^o$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

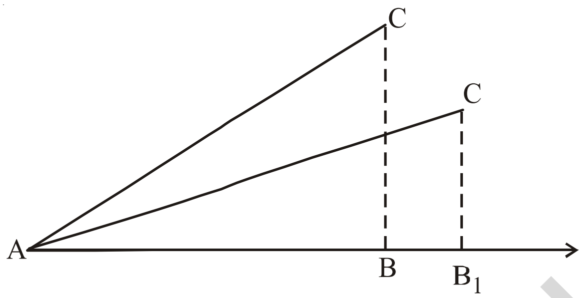
### 11.3.3 0° ಮತ್ತು 90° ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು $30^o$, $45^o$ ಮತ್ತು $60^o$ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು $0^o$ ಮತ್ತು $90^o$ ಗಳ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

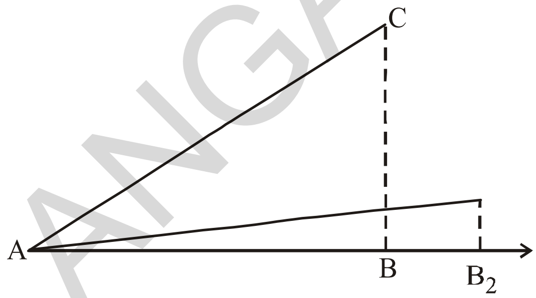
AB ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ r ಉದ್ದ ಹೊಂದಿದ AC ರೇಖಾ ಖಂಡವು ಲಘುಕೋನವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಬಿಂದು B ನಿಂದ C ಬಿಂದುವಿನ ಎತ್ತರ BC. AB ಮೇಲೆ AC ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವಂತೆ AB ಮೇಲೆ AC ಬಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ, ಆಗ BC ಮತ್ತು AB ಗಳ ಉದ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಬರುತ್ತದೆ.?




ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಕೋನ A ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, AB ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ C ಎತ್ತರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ, ಬಿಂದು B ನಿಂದ $B_1$ ಗೆ ಆನಂತರ $B_2$ ಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಆ ಕೋನ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ ಎತ್ತರ (i.e. ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ) ಸೊನ್ನೆ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು AC ಯಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. (ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ)




ಹಂತ (i)




ಹಂತ (ii)

ಆ ನಂತರ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

$\sin A = \dfrac{BC}{AC}$ ಮತ್ತು $\cos A = \dfrac{AB}{AC}$

$A = 0^o$ ಆದರೆ $BC = 0$ ಮತ್ತು $AC = AB = r$

ಆ ನಂತರ $\sin 0^o = \dfrac{0}{r} = 0$ ಮತ್ತು $\cos 0^o = \dfrac{r}{r} = 1$

ನಮಗೆ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ ಎಂದು ಗೊತ್ತು

ಆದ್ದರಿಂದ, $\tan 0^o = \dfrac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

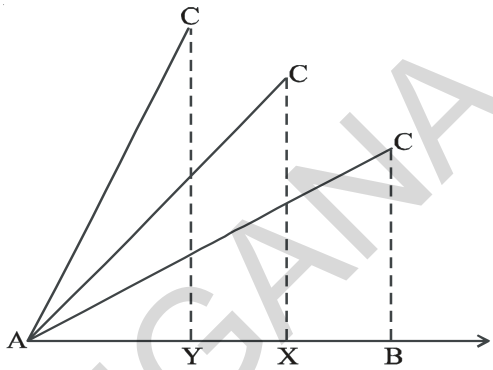
1. $\operatorname{cosec} 0^o = \dfrac{1}{\sin 0^o}$ ಇದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೇ ? ಏಕೆ?

2. $\cot 0^o = \dfrac{1}{\tan 0^o}$ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೇ? ಏಕೆ?

3. $\sec 0^o = 1$ ಏಕೆ?

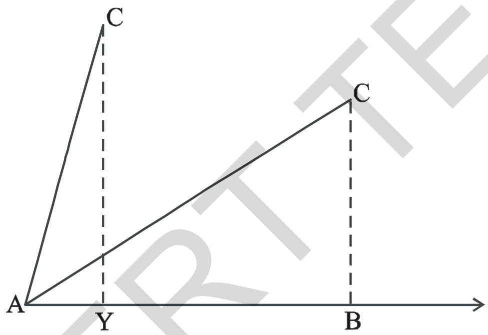
ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಕೋನವನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ ಸೊನ್ನೆ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಆ ನಂತರ ನಾವು AB ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ AC ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು AB ಕೋನವನ್ನುಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, AB ಮೇಲೆ C ಎತ್ತರ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ, ಬಿಂದು B ನಿಂದ X ಗೆ ಆ ನಂತರ Y ಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ ಕೋನ A ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ, ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸಮಯಕ್ಕೆ ಕೋನಬೆಲೆ $90^o$ ಸಮೀಪಿಸಿದರೆ ಏನು ನಡೆಯುತ್ತದೆ?

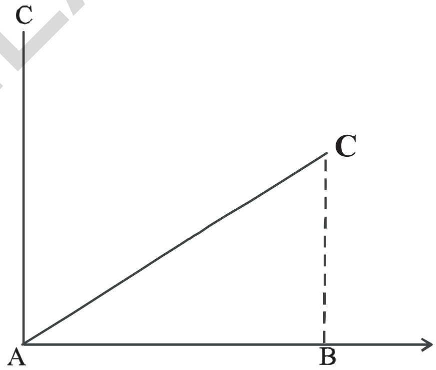



ಹಂತ (i)

ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ A ಯಲ್ಲಿ B ಸೇರುತ್ತದೆ. AC ಯಲ್ಲಿ BC ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೋನದ ಬೆಲೆ $90^o$ಆದಾಗ ಪಾದ (ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು) ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿ, BC( ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು)ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ AC ಗೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ r ಗೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ.




ಹಂತ (ii)




ಹಂತ (iii)

ಆ ನಂತರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$\sin A = \dfrac{BC}{AC}$ ಮತ್ತು $\cos A = \dfrac{AB}{AC}$

ಕೋನ $A = 90^o$ ಆದರ $AB = 0$ ಮತ್ತು $AC = BC = r$

ಆಗ $\sin 90^o = \dfrac{r}{r} = 1$ ಮತ್ತು $\cos 90^o = \dfrac{0}{r} = 0$

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ**

$\tan 90^o$, $\text{cosec } 90^o$, $\sec 90^o$ ಮತ್ತು $\cot 90^o$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು, ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

**ಕೋಷ್ಟಕ 11.1**

| $\angle A$ | $0^o$ | $30^o$ | $45^o$ | $60^o$ | $90^o$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin A$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos A$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan A$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ |
| $\cot A$ | ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| $\sec A$ | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ |
| $\text{cosec}\, A$ | ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |

**ಆಲೋಚಿಸಿ - ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.**

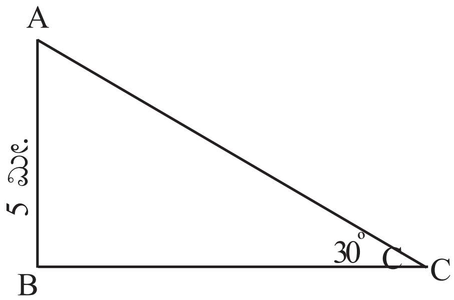
ಕೋನ A ಮತ್ತು ಬೆಲೆ $0^o$ ಯಿಂದ $90^o$ ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ $\sin A$ ಮತ್ತು $\cos A$, ಬೆಲೆಗಳು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತಾ ಇರುತ್ತವೆ (ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ)

$A \geq B$, ಆದರೆ $\sin A \geq \sin B$. ಎನ್ನುವುದು ಸರಿಯೇ ?

$A \geq B$, ಆದರೆ $\cos A \geq \cos B$. ಎನ್ನುವುದು ಸರಿಯೇ ? ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

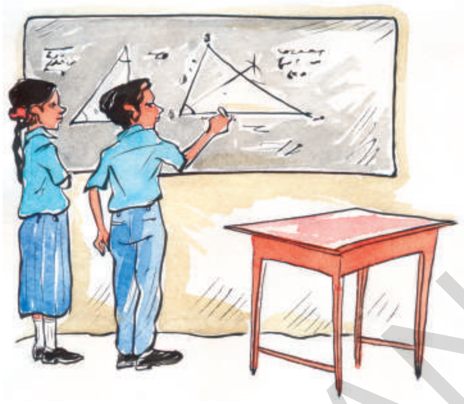
**ಉದಾಹರಣೆ -4.** B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ $\Delta ABC$ ಯಲ್ಲಿ $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle ACB = 30^o$ ಆದರೆ BC ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\angle ACB=30^o$ ಮತ್ತು AB=5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. BC ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಯಬೇಕೆಂದರೆ ಕೋನ $\angle C$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ AB ಮತ್ತು BC ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಕೋನ $\angle C$ ಗೂ BC ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಕೋನ C ಗೆ BC ಎನ್ನುವುದು ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು ಮತ್ತು AB ಎನ್ನುವುದು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಾಗುತ್ತವೆ.




ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{BC} = \tan C$

i.e. $\frac{5}{BC} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$



ಈ ವಿಧವಾಗಿ $BC = 5\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$$\sin 30 = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

AC = 10 ಸೆಂ. ಮೀ

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** 6ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಕೇಂದ್ರದ ಬಳಿ $60^o$ ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಆ ಜ್ಯಾ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** OA = OB = 6ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ

$\angle AOB = 60^o$ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

AB ಮೇಲೆ 'O' ನಿಂದ AC ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

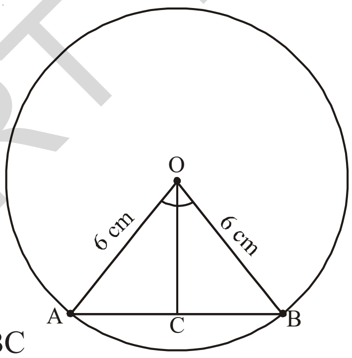
$\angle COB = 30^o$.

$\Delta COB$ ಯಲ್ಲಿ

$$\sin 30^o = \frac{BC}{OB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = \frac{6}{2} = 3.$$



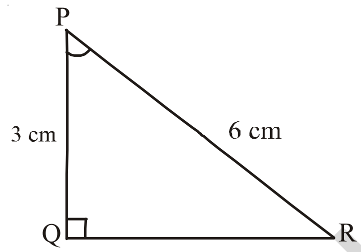

ಆದರೆ, ಜ್ಯಾ ಉದ್ದ AB = 2BC

$= 2 \times 3 = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಜ್ಯಾ ಉದ್ದ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ **'sine'** ಎಂಬ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಆರ್ಯಭಟ(A.D. 500) ರಚಿಸಿದ "ಆರ್ಯಬಟ್ಟೀಯಂ" ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಆರ್ಯಭಟ ಬಳಸಿದ 'ಅರ್ಧ ಜ್ಯಾ' ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಂಡು 'ಜ್ಯಾ' ಅಥವಾ 'ಜಿವ' ವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಯಿತು. ಆರ್ಯಭಟೀಯಂ ಅರೆಬಿಕ್‌ಗೆ ಭಾಷಾಂತರವಾದಾಗ ಜೀವ ಪದವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ನಂತರದ ಭಾಷಾಂತರದಲ್ಲಿ '***sinus***' ಯಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆ ಕಂಡಿತು. '***sinus***' ಅಂದರೆ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ 'ವಕ್ರರೇಖೆ' ಎಂದರ್ಥ, ನಂತರ '***sinus***' ಪದವು '***sine***' ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿತು. ಆಂಗ್ಲ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ 'ಎಡ್ಮಂಡ್ ಗುಂಟರ್' (1581–1626) ರವರು ಮೊದಲಬಾರಿಗೆ '***sine***' ಪದವನ್ನು '***sin***' ಆಗಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬಳಕೆ ಮಾಡಿದರು.

**ಉದಾಹರಣೆ -6.** Q ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನವಿರುವ $\Delta PQR$ ನಲ್ಲಿ PQ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ $\angle QPR$ ಮತ್ತು $\angle PRQ$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.




**ಪರಿಹಾರ :** PQ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR = 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

$\frac{PQ}{PR} = \sin R$ ಗೆ

ಅಥವಾ $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\angle PRQ = 30^o$

ಇನ್ನೂ, $\angle QPR = 60^o$ (ಏಕೆ ?)

ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ಅಳತೆ (ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹು ಅಥವಾ ಕೋನ) ಕೊಟ್ಟರೆ ಉಳಿದ ಬಾಹುಗಳು, ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ -7.** $\sin (A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A+B) = \frac{1}{2}$, $0^o < A+B \le 90^o$, $A > B$ ಆದರೆ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\sin (A-B) = \frac{1}{2}$, $A-B = 30^o$ (ಏಕೆ ?)

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos (A+B) = \frac{1}{2}$, ಆದರೆ, $A+B = 60^o$ (ಹೇಗೆ?)

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ : $A = 45^o$ ಮತ್ತು $B = 15^o$. (ಹೇಗೆ ?)

## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ..

(i) $\sin 45^o + \cos 45^o$

(ii) $\frac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \operatorname{cosec} 60^o}$

(iii) $\frac{\sin 30^o + \tan 45^o - \operatorname{cosec} 60^o}{\cot 45^o + \cos 60^o - \sec 30^o}$

(iv) $2\tan^2 45^o + \cos^2 30^o - \sin^2 60^o$

(v) $\frac{\sec^2 60^o - \tan^2 60^o}{\sin^2 30^o + \cos^2 30^o}$

2. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆಯ್ದು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{2\tan 30^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\sin 60^o$ (b) $\cos 60^o$ (c) $\tan 30^o$ (d) $\sin 30^o$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\tan 90^o$ (b) 1 (c) $\sin 45^o$ (d) 0

(iii) $\dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$

(a) $\cos 60^o$ (b) $\sin 60^o$ (c) $\tan 60^o$ (d) $\sin 30^o$

3. $\sin 60^o \cos 30^o + \sin 30^o \cos 60^o$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ. $\sin(60^o + 30^o)$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಇದರಿಂದ ನೀವೇನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಿರಿ.

4. $\cos(60^o + 30^o) = \cos 60^o \cos 30^o - \sin 60^o \sin 30^o$ ಎನ್ನುವುದು ಸರಿಯೇ?

5. Q ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ $\Delta PQR$ ನಲ್ಲಿ $PQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. $\angle RPQ = 60^o$ ಆದರೆ QR ಮತ್ತು PR ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. Y ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ $\Delta XYZ$ ನಲ್ಲಿ $YZ = x$, ಮತ್ತು $XZ = 2x$ ಆದರೆ $\angle YXZ$ ಮತ್ತು $\angle YZX$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

7. $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ ಎನ್ನುವುದು ಸರಿಯೇ ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

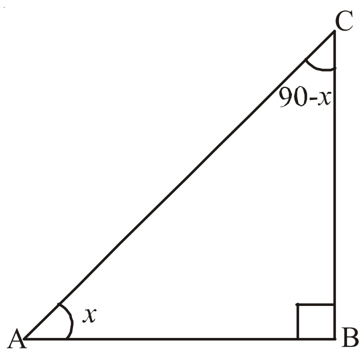
**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

ಯಾವ ಲಘುಕೋನ ಬೆಲೆಗೆ (i) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.?

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ $0^o \le \theta \le 90^o$ ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ?

## 11.4 ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $90^o$ ಆದರೆ ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಗೊತ್ತಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ! B ಬಳಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಪೂರಕಕೋನಗಳಿವೆಯೇ? ಒಂದು ಕೋನದ ಬೆಲೆ $90^o$. ಆದ್ದರಿಂದ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $90^o$ ಆಗುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ! (ಏಕೆ?).




ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A + \angle C = 90^o$ ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳನ್ನು ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\angle A = x$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆಗ $x$ ಗೆ ಆಧರಿಸಿ 'ಅಭಿಮುಖಬಾಹು', BC ಮತ್ತು AB 'ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು' ಆಗುತ್ತವೆ.

$\sin x = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad$ $\cos x = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad$ $\tan x = \dfrac{BC}{AB}$

$\text{cosec}\, x = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad$ $\sec x = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad$ $\cot x = \dfrac{AB}{BC}$

$\angle A + \angle C = 90^o$, ಆದ್ದರಿಂದ $\angle C = 90^o - \angle A$

ಹಾಗೆಯೇ $\angle A = x$, ಆದರೆ $\angle C = 90^o - x$

$\angle C$ ಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ $(90^o - x)$ ನ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು AB ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು BC ಆಗುತ್ತದೆ.

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad$ $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad$ $\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC}$

$\text{Cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB}$ $\quad$ $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC}$ $\quad$ $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB}$

ಆ ನಂತರ $x$ ಮತ್ತು $(90^o - x)$ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$\sin(90^o - x) = \dfrac{AB}{AC} = \cos x$ ಮತ್ತು $\cos(90^o - x) = \dfrac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \dfrac{AB}{BC} = \cot x$ ಮತ್ತು $\cot(90^o - x) = \dfrac{BC}{AB} = \tan x$

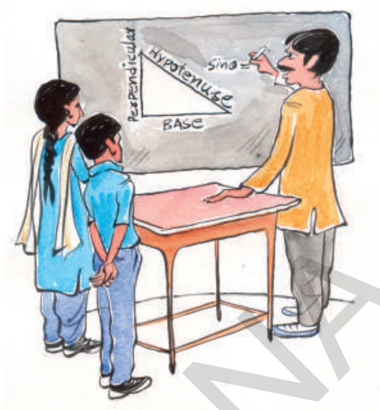
$\text{cosec}(90^o - x) = \dfrac{AC}{AB} = \sec x$ ಮತ್ತು $\sec(90^o - x) = \dfrac{AC}{BC} = \text{cosec}\, x$

**ಆಲೋಚಿಸಿ ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ.**

A ನ $0^0 \leq A \leq 90^0$ ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ಸಮಂಜಸವೇ? ಸರಿ ನೋಡಿರಿ.

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(90^o - A) = \cos A$ | | $\cos(90^o - A) = \sin A$ |
| $\tan(90^o - A) = \cot A$ | ಮತ್ತು | $\cot(90^o - A) = \tan A$ |
| $\sec(90^o - A) = \text{cosec}\, A$ | | $\text{cosec}(90^o - A) = \sec A$ |

ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ




**ಉದಾಹರಣೆ -8.** $\dfrac{\sec 35^o}{\operatorname{cosec} 55^o}$ ನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ

**ಪರಿಹಾರ :** $\operatorname{cosec} A = \sec (90^o - A)$

$$\operatorname{cosec} 55^o = \sec (90^o - 35^o)$$

$$\operatorname{cosec} 55^o = \sec 35^o$$

ಈಗ $\dfrac{\sec 35^o}{\operatorname{cosec} 55^o} = \dfrac{\sec 35^o}{\sec 35^o} = 1$

**ಉದಾಹರಣೆ -9.** $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$, ಆದರೆ 7A ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\cos 7A = \sin(A - 6^o)$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ...(1)

$$\sin (90 - 7A) = \sin (A - 6^o)$$

7A ಲಘುಕೋನ, ಆದ್ದರಿಂದ $(90 - 7A)$ ಮತ್ತು $(A - 6^o)$ ಗಳು ಸಹ ಲಘುಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$90^o - 7A = A - 6^o$$

$$8A = 96^o$$

$$A = 12^o.$$

**ಉದಾಹರಣೆ -10.** $\sin A = \cos B$, ಆದರೆ $A + B = 90^o$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\sin A = \cos B$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ...(1)

$\cos B = \sin (90^o - B)$, ಎಂದು ಗೊತ್ತು

ಆದ್ದರಿಂದ $\sin A = \sin (90^o - B)$

A, B ಲಘುಕೋನಗಳು ಆದರೆ $A = 90^o - B$

$$\Rightarrow A + B = 90^o.$$

**ಉದಾಹರಣೆ -11.** $\sin 81^o + \tan 81^o$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $0^o$ ಮತ್ತು $45^o$ ನಡುವಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** $\sin 81^o = \cos(90^o - 81^o) = \cos 9^o$

$$\tan 81^o = \tan(90^o - 81^o) = \cot 9^o$$

ಆದರೆ, $\sin 81^o + \tan 81^o = \cos 9^o + \cot 9^o$

**ಉದಾಹರಣೆ -12.** ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಾದರೆ $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** A, B ಮತ್ತು C ಗಳು $\Delta$ ABC ಯಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ

$A + B + C = 180^\circ$.

ಎರಡೂ ಕಡೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

ಎರಡೂ ಕಡೆ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತ sin ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$ ; ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $\frac{\tan 36^\circ}{\cot 54^\circ}$ (ii) $\cos 12^\circ - \sin 78^\circ$ (iii) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

   (iv) $\sin 15^\circ \sec 75^\circ$ (vi) $\tan 26^\circ \tan 64^\circ$

2. ಸಾಧಿಸಿರಿ

   (i) $\tan 48^\circ \tan 16^\circ \tan 42^\circ \tan 74^\circ = 1$

   (ii) $\cos 36^\circ \cos 54^\circ - \sin 36^0 \sin 54^\circ = 0$.

3. $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, 2A ಲಘುಕೋನ ಆದರೆ A ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. A, Bಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳು ಮತ್ತು $\tan A = \cot B$ ಆದರೆ $A + B = 90^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. A, B ಮತ್ತು C ಗಳು $\Delta$ ABC, ಯಲ್ಲಿನ ಅಂತರ್ ಕೋನಗಳಾದರೆ $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $\sin 75^\circ + \cos 65^\circ$ ನ್ನು $0^\circ$ ಮತ್ತು $45^\circ$ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಬೆಲೆಗಳ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

## 11.5 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

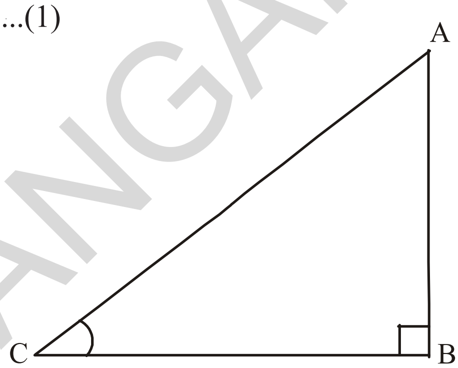
ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಗಣಿತ ಸಮೀಕರಣ ಸರಿಹೊಂದುವಂತಿದ್ದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ ಇಲ್ಲಿ, ನಾವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ !

B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

We have $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ....(1)




ಎರಡೂ ಕಡೆ $AC^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$$

$$\Rightarrow (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ $(\cos A)^2$ ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $\cos^2 A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $\cos A^2$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯುವುದಿಲ್ಲ.

i.e., $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ ಯಾಗಿ ಬರೆಯಕೂಡದು)

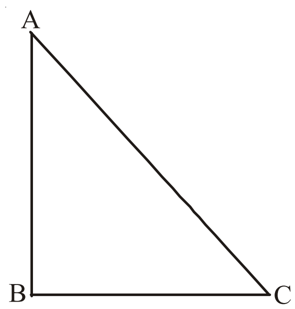
$\therefore$ ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ $\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನ A ಯನ್ನು ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಈ ಸಮೀಕರಣ A ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸರಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ

$$\boxed{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$$

ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೋಡೋಣ.




ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ಎರಡೂ ಕಡೆ $AB^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\boxed{\therefore\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A}$$

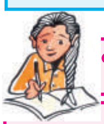
ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ $BC^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಾವು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ನಾವು ಒಂದು ಕೋನದ ಅನುಪಾತ ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

### ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$0^0 \leq A \leq 90^0$ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸತ್ಯವೇ?

- $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
- $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$



### ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ

(i) $\sin A = \frac{15}{17}$, ಆದರೆ $\cos A$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $\tan x = \frac{5}{12}$, ಆದರೆ $\sec x$ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) $\text{cosec}\,\theta = \frac{25}{7}$, ಆದರೆ $\cot\theta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ರುಜುವಾತು ಮಾಡಿ.

(i) $\dfrac{\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ}{\cos^2 36^\circ + \cos^2 54^\circ}$ (ii) $\sin 5^\circ \cos 85^\circ + \cos 5^\circ \sin 85^\circ$

(iii) $\sec 16^\circ\ \text{cosec}\, 74^\circ - \cot 74^\circ \tan 16^\circ$.

**ಉದಾಹರಣೆ -13.** $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\ \text{cosec}\,\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** LHS $= \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (\text{ಏಕೆ ?})$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \ \cos\theta} \qquad \text{(ಏಕೆ ?)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \ \frac{1}{\cos\theta} = \text{cosec}\theta \ \sec\theta$$

**ಉದಾಹರಣೆ -14.** $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. $(0 \neq \theta)$

**ಪರಿಹಾರ :** L.H.S. $= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (ಏಕೆ ?)

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ (ಏಕೆ ?)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta =$ R.H.S

**ಉದಾಹರಣೆ -15.** $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. $(0 < \theta < 90^0)$

**ಪರಿಹಾರ :** LHS $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ ( 1 + cos θ ನ್ನು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಕ್ಕೆ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ)

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad \text{(ಏಕೆ ?)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

## ಅಭ್ಯಾಸ 11.4

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)$

(ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(iii) $(\sec^2\theta - 1)(\text{cosec}^2\theta - 1)$

2. $(\text{cosec}\ \theta - \cot\ \theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. $(0^0 < \theta < 90^0)$

4. $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. $(0^0 < \theta < 90^0)$

5. $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta.\sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. $(0^0 < \theta < 90^0)$

6. $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A)$ ಸುಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ

7. $(\sin A + \text{cosec}\ A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $(1 - \cos\theta)\,(1 + \cos\theta)\,(1 + \cot^2\theta)$ ಸೂಕ್ಷ್ಮೀಕರಿಸಿ

9. $\sec\theta + \tan\theta = p$, ಆದರೆ $\sec\theta - \tan\theta$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

10. $\text{cosec}\ \theta + \cot\ \theta = k$ ಆದರೆ $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

[ಈ ಅಭ್ಯಾಸ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉದ್ದೇಶಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ]

1. $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\text{cosec}\theta - 1}{\text{cosec}\theta + 1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

   ( $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

3. $(\text{cosec}\ A - \sin A)\,(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$. ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1+\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $\left(\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)}\right) = \left(\dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

★ "ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ – ಪ್ರಮಾಣ ತಯಾರಿಸುವ ಪ್ರಯೋಗಿಕವಾಗಿ ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಕೆ (ಸೂಚನೆ: ಕೊಟ್ಟ $A_3$ ಸೈಜ ಗ್ರಾಫ್ ಪೇಪರ್, ವೃತ್ತಾಕಾರ ಕೋನಮಾಪಕ, ಸ್ಕೇಲು, ದಾರ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳಿಗೆ – ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.)

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

1. B ಹತ್ತಿರ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ}}, \quad \cos A = \frac{\angle A \text{ ಗೆ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ}}{\text{ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$; $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$; $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

3. ಒಂದು ಲಘುಕೋನದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದರೆ ಉಳಿದ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

4. $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ ಮತ್ತು $90^o$ ಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಬೆಲೆಗಳು.

5. sin A ಅಥವಾ cos A ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\sec A\ (A \neq 90^o)$ ಅಥವಾ $\operatorname{cosec} A\ (A \neq 0^o)$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ ಅಥವಾ ಸಮವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

6. $\sin(90^o - A) = \cos A$, $\cos(90^o - A) = \sin A$

   $\tan(90^o - A) = \cot A$, $\cot(90^o - A) = \tan A$

   $\sec A(90^o - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ ಇಲ್ಲಿ $0^o \leq A \leq 90^o$

   $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ ಇಲ್ಲಿ $0^o \leq A \leq 90^o$

# ಅಧ್ಯಾಯ 12 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನ್ವಯಿಕೆಗಳು

## (Applications of Trigonometry)

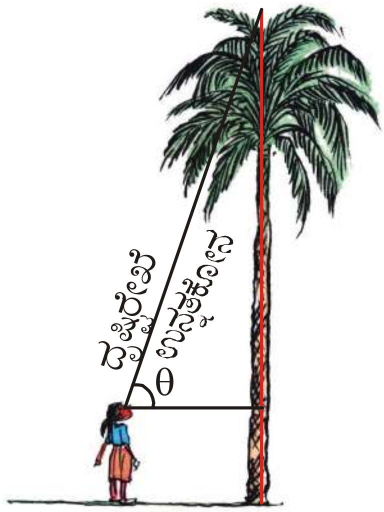
### 12.1 ಪರಿಚಯ

ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಎತ್ತರವಾದ ಪರ್ವತ ಶಿಖರ 'ಎವರೆಸ್ಟ್ ಶಿಖರ ' ಎಂದು , ಅದರ ಎತ್ತರ 8848 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಎಂದು ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಓದಿಕೊಂಡೇ ಇರುತ್ತೀರಿ.

ಆದಿಲಾಬಾದ್ ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿ 'ಕುಂಟಾಲ ಜಲಪಾತ ತೆಲಂಗಾಣ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯೇ ಅತೀ ಎತ್ತರವಾದ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಜಲಪಾತ ಎಂದೂ, ಅದರ ಎತ್ತರ 147 ಅಡಿಗಳು ಎಂದು ಎಲ್ಲೋ ಒಂದು ಕಡೆ ಓದಿಕೊಂಡಿರುತ್ತೀರಿ.

ಇವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳು, ಯಾವ ವಿಧವಾಗಿ ಅಳೆದಿರುತ್ತಾರೆ? ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಳೆಯಬಹುದೆ ? ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆ ಭವನದ ಎತ್ತರವನ್ನಾಗಲೀ, ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲಲ್ಲಿರುವ ಎತ್ತರವಾದ ಗಿಡದ ಎತ್ತರವನ್ನಾಗಲೀ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲಿರೇ? ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡೋಣ.

ವಿಜಯ ಅವರ ಮನೆ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ತಾಳೆಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಳು. ಆಕೆ ಮರದ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದಳು. 'ಆಕೆ ಕಣ್ಣು ' ಮತ್ತು 'ಮರದ ಮೇಲಿನ ತುದಿ 'ಸೇರಿಸುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಿದಳು. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು "**ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ** " ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಆಕೆ ತನ್ನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ 'ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ 'ಯನ್ನು ಊಹಿಸಿದಳು.

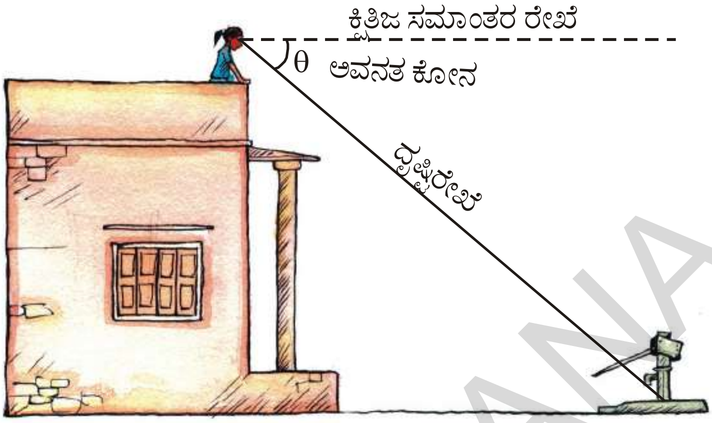



ಇಲ್ಲಿ ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ, ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಮರಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತವೆ.

ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಆಕೆ ಈ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕೋನ, ಒಂದು ಬಾಹುವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಅಷ್ಟೇ!

'ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ 'ಗೆ 'ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ 'ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿದ್ದರೆ ಇದ್ದರೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು "**ಉನ್ನತ ಕೋನ**"(Angle of Elevation) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆ ಭವನದ ಮೇಲಿನಿಂದ ನಿಂತಿದ್ದೀರೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ನೀವು ಪಾಠಶಾಲೆ ಆವರದಣದಲ್ಲಿರುವ ಬೋರಿಂಗ್ ಪಂಪು ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆ ಭವನದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ, ಅದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಆ ಬೋರಿಂಗ್ ಪಂಪಿನ ಕೆಳ ಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.




ಆಗ, "**ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ**" ಗೆ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ, ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು "**ಅವನತ ಕೋನ**"(Angle of Depression)ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

| |
|---|
| ಸರ್ವೇಯರ್‌ಗಳು ನೂರಾರು ವರ್ಷಗಳಿಂದಲೂ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾ ಇದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಸರ್ವೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ, ಅವನತ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ '**ಥಿಯೋಡಲೈಟ್**' ಎಂಬ ಪರಿಕರವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. 19 ನೇ ಶತಾಬ್ದದಲ್ಲಿ "ಗ್ರೇಟ್ ಟ್ರಿಗನಾ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಸರ್ವೆ "ಹೆಸರಿನಿಂದ ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಇಂಡಿಯಾ ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಸರ್ವೆ ನಿರ್ವಹಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಎರಡು ದೊಡ್ಡ "**ಥಿಯೋಡಲೈಡ್**"ಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿಸಿದೆ. ಆ ಸರ್ವೆ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವಾಗ, 1852 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿಯೇ ಒಂದು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಪರ್ವತ ಶಿಖರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಸುಮಾರು 160 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಿಂದ ಸುತ್ತೂ ಇರುವ ಆರು ವಿವಿಧ ಸ್ಥಳಗಳಿಂದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿತ್ತು. 1856ರಲ್ಲಿ ಆ ಸರ್ವೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕಾರಿಯಾದ "**ಸರ್ ಜಾರ್ಜ್ ಎವರೆಸ್ಟ್**"ಗೌರವಾರ್ಥ ಆ ಶಿಖರಕ್ಕೆ ಆತನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಆ ಥಿಯೋಡಲೈಟ್‌ಗಳನ್ನು ಡೆಹರಾ ಡೂನ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಸರ್ವೇ ಆಫ್ ಇಂಡಿಯಾ ಸಂಗ್ರಹಾಲಯದಲ್ಲಿ ಸಂದರ್ಶನಾರ್ಥವಾಗಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. |

## 12.1 ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ

ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(i) ಗಣಿತ ಅನುಕೂಲಕತೆಗಾಗಿ ಟವರ್‌ಗಳು, ಮರಗಳು, ಭವನಗಳು, ಹಡಗುಗಳು, ಪರ್ವತಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೇ ಪರಿಗಣನೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

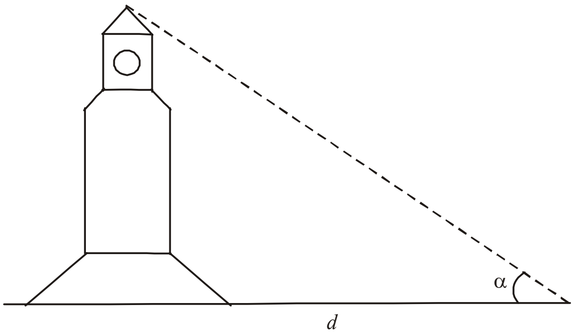
(ii) ಉನ್ನತ ಕೋನ ಅಥವಾ ಅವನತ ಕೋನವನ್ನು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ಆಧಾರವಾಗಿಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

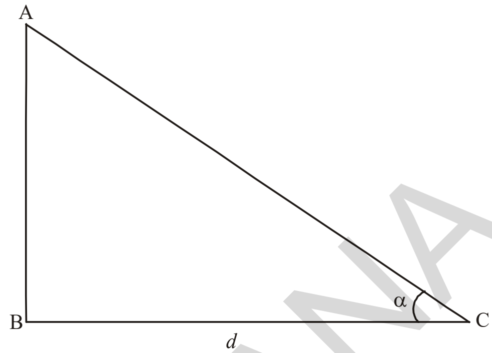
(iii) ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡದಿದ್ದರೆ, ಅವನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಉಪೇಕ್ಷಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ, ಅವನತ ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ, ಆ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯವಾಗಿ ಊಹಿಸಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ಆ ಚಿತ್ರಗಳ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** ಪರಿಶೀಲಕನಿಂದ $d$ ಮೀಟರುಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕ್ಲಾಕ್ ಟವರ್‌ನ ಮೇಲಿನ ತುದಿ $\alpha^o$ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

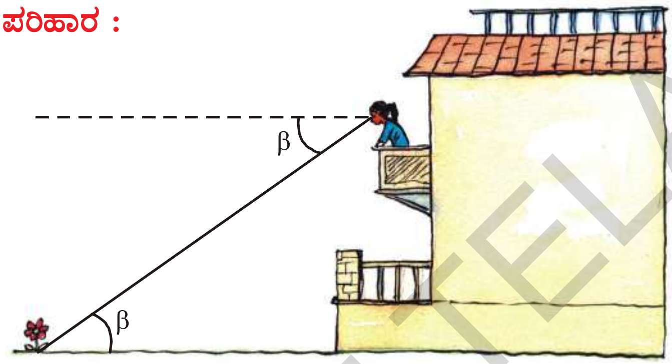
**ಪರಿಹಾರ :** ಸಮಸ್ಯೆಗನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

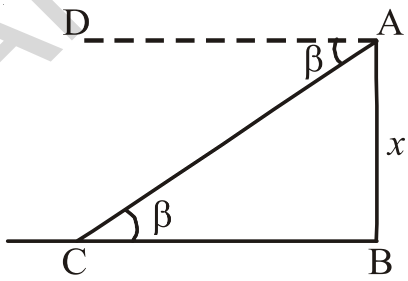



**ಉದಾಹರಣೆ -2.** ರಿಂಕಿ ಮೊದಲ ಅಂತಸ್ಥಿನಲ್ಲಿರುವ ಬಾಲ್ಕನಿಯಿಂದ ಹೊರಗಡೆ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಹೂವನ್ನು $\beta^{o}$ ಅವನತ ಕೋನದಿಂದ ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ಮೊದಲನೆ ಅಂತಸ್ಥಿನ ಎತ್ತರ $x$ ಮೀಟರುಗಳು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :**



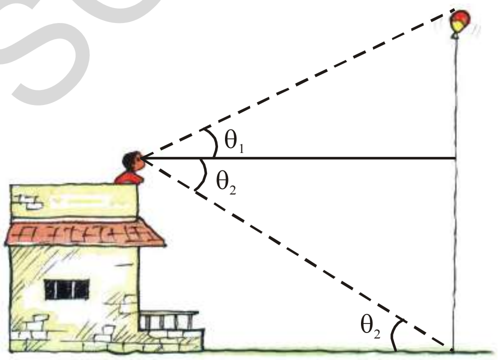



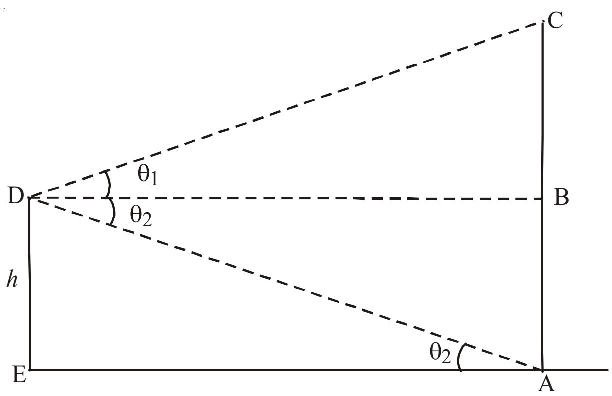

ಇಲ್ಲಿ $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (ಹೇಗೆ?)

**ಉದಾಹರಣೆ -3.** ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಹಗ್ಗದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೂನ್ ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ತೇಲುತ್ತಿದೆ. ಒಂದು ಭವನದ ಮೇಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಅದರ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು '$\theta_1$' ಉನ್ನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಹಗ್ಗದ ಕೆಳ ಭಾಗವನ್ನು '$\theta_2$'. ಅವನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆ ಭವನದ ಎತ್ತರ '$h$' ಅಡಿಗಳು. ಈ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಿದಾಗ

$\angle BDA = \angle DAE$. (ಏಕೆ?)



## ಇವು ಮಾಡಿರಿ

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :
   (i) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ '$\alpha$' ಉನ್ನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಗಾಳಿ ಪಟವನ್ನು ಹಾರಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಗಾಳಿ ಪಟವನ್ನು '$l$' ಉದ್ದವಿರುವ ದಾರದಿಂದ ಹಾರಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   (ii) ಒಂದು ನದಿಗೆ ಒಂದು ಕಡೆ 'h' ಎತ್ತರವಿರುವ ಮರದ ಮೇಲಿನಿಂದ ನದಿಯ ಎರಡು ತೀರಗಳನ್ನು $\theta_1$ ಮತ್ತು $\theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ ಅವನತ ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾನೆ. ನದಿ ಅಗಲ '$d$' ಆದರೆ, ಈ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

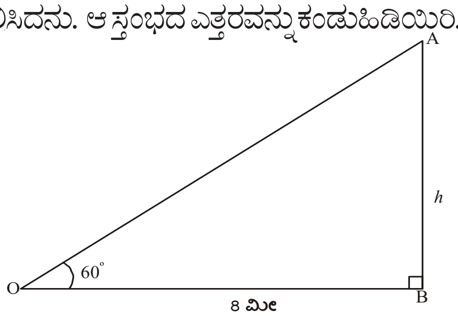
## ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ

1. ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆ ಭವನದಿಂದ '$d$' ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಭವನದ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು $\alpha$ ಉನ್ನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರು.
   ಈ ಪಾಠಶಾಲೆ ಭವನದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಿರಿ.
2. '$x$' ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಏಣಿ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ '$\theta$' ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಹಾಗೆ ಗೋಡೆಗೆ ಆನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಏಣಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗ ತಾಕಿದ ಗೋಡೆಯ ಸ್ಥಾನದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು, ಜ್ಯಾಮಿತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಊಹಿಸುವುದು ನಡೆದಿದೆ. ಈಗ ನಾವು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನದ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-4.** ಒಬ್ಬ ಬಾಲಕ ಒಂದು ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ತಂಭದ ಕೆಳ ಭಾಗದಿಂದ 8 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು $60^\circ$ ಉನ್ನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದನು. ಆ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ತ್ರಿಭುಜ OAB ಚಿತ್ರದಿಂದ




OB = 8 ಮೀಟರುಗಳು

$\angle AOB = 60^\circ$

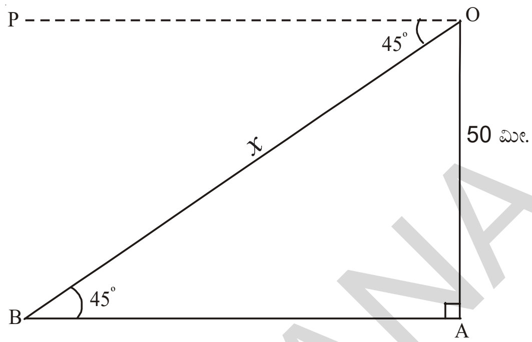
ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ = AB = $h$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಎಂದುಕೊಂಡರೆ

($\Delta OAB$ ಯಲ್ಲಿ $\angle AOB$ ಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹುವಿನ ಬೆಲೆ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು, ನಾವು "ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು" ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ "$\tan\theta$" ಆಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.)

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \qquad h = 8\sqrt{3} \text{ ಮೀಟರ್‌ಗಳು}$$

**ಉದಾಹರಣೆ -5.** ಒಂದು ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಮನೋಜ್ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು $45^o$ ಅವನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದನು. ಭೂಮಿಯಿಂದ ಹೆಲಿಕಾಪ್ಟರ್ 50 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಮನೋಜ್‌ಗೆ ಆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ.




**ಪರಿಹಾರ :** ತ್ರಿಭುಜ OAB ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ

OA = 50 ಮೀಟರಗಳು

$\angle POB = \angle OBA = 45^o$ (ಏಕೆ ?)

OB = ಮನೋಜ್‌ನಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಿರುವ ದೂರ $= x$.

(ತ್ರಿಭುಜ OAB ಯಲ್ಲಿ $\angle OBA$ ಯ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಅಳತೆ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಕರ್ಣ OB ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು ಕರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ "sin" ಆದ್ದರಿಂದ "sin"ನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. )

$$\sin 45^o = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{50}{x}$$

$x = 50\sqrt{2}$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು

(ಮನೋಜ್‌ನಿಂದ $50\sqrt{2}$ ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿ ಇದ್ದಾನೆ. )

## ಅಭ್ಯಾಸ - 12.1

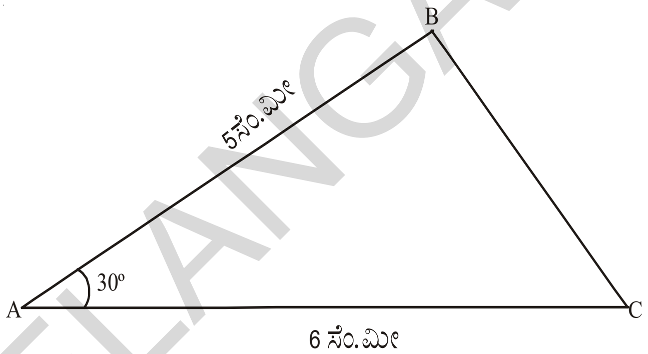
1. ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಟವರ್ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಿಂತಿದೆ. ಆ ಟವರ್‌ನ ಕೆಳಭಾಗದಿಂದ 15 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಆ ಟವರ್‌ನ ಮೇಲಿನ ತುದಿ $45^o$ ಉನ್ನತ ಕೋನದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ಟವರ್ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?
2. ಒಂದು ಮರ ಗಾಳಿಗೆ ಮುರಿದಿದೆ, ಮುರಿದ ಮೇಲ್ಭಾಗ $30^o$ ಕೋನ ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತಾ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದಿದೆ. ಮರದ ಬುಡದಿಂದ, ಕೆಳಗೆ ಬಿದ್ದ ಮರದ ತುದಿಯ ನಡುವಿನ ದೂರ 6 ಮೀಟರ್‌ಗಳು. ಮರ ಮುರಿದು ಬೀಳುವಮುನ್ನ ಆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?
3. ಒಂದು ಪಾರ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಆಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಒಬ್ಬ ಕಾಂಟ್ರಾಕ್ಟರ್ ಒಂದು ಜಾರುವ ಬಂಡಿಯನ್ನು ಏರ್ಪಾಟು ಮಾಡಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಅದನ್ನು 2 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ, ನೆಲದೊಂದಿಗೆ $30^o$ ಕೋನ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಹಾಗೆ ಏರ್ಪಡಿಸಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಜಾರುವ ಬಂಡಿಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ?
4. ಬೆಳಿಗ್ಗೆ 7 ಗಂಟೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 15 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ತಂಭದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ $5\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು. ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು, ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಎಂತಹ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತಿವೆ?
5. ಪವನ್ 10 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮೂರು ಬಲವಾದ ಹಗ್ಗಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಒಂದೊಂದು ಹಗ್ಗ ಸ್ತಂಭದೊಂದಿಗೆ $30^o$ ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡುವಂತಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

6. ವಿಜಯ್ ನೆಲದಿಂದ 6 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಭವನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ನೆಲದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಗುರಿಯನ್ನು $60^\circ$ ಅವನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಬಾಣದೊಂದಿಗೆ ಭೇಧಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ವಿಜಯ್‌ನಿಂದ ಗುರಿ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ

7. 9 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ಎಲೆಕ್ಟ್ರಿಷಿಯನ್ ರಿಪೇರಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ರಿಪೇರಿ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಆ ಸ್ತಂಭದ ಮೇಲಿನಿಂದ 1.8 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಸೇರಬೇಕು. ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲಿಂದ $60^\circ$ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಇಡಬೇಕಾಗಿ ಬಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಏಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಏಣಿಯ ಕೆಳ ಭಾಗದಿಂದ ಸ್ತಂಭದ ಅಡಿಭಾಗದ ದೂರ ಎಷ್ಟು?

8. ಒಂದು ದೋಣಿ ಒಂದು ನದಿಯನ್ನು ದಾಟಬೇಕಾಗಿದೆ. ನದಿ ಪ್ರವಾಹ ಕಾರಣದಿಂದ ಆ ನದಿ ತೀರದೊಂದಿಗೆ $60^\circ$ ಗಳ ಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಆ ದೋಣಿ 600 ಮೀಟರುಗಳು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ ಆ ಕಡೆ ತೀರವನ್ನು ಸೇರಿದೆ. ಆ ನದಿಯ ಅಗಲವೆಷ್ಟು?

9. 1.8 ಮೀ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಪರಿಶೀಲಕ ಒಂದು ತಾಳೆ ಮರದಿಂದ 13.2 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾನೆ. ಆ ಮರದ ಮೇಲೆ ಪರಿಶೀಲಕನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ $45^\circ$ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ ಆದರೆ ಆ ಮರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

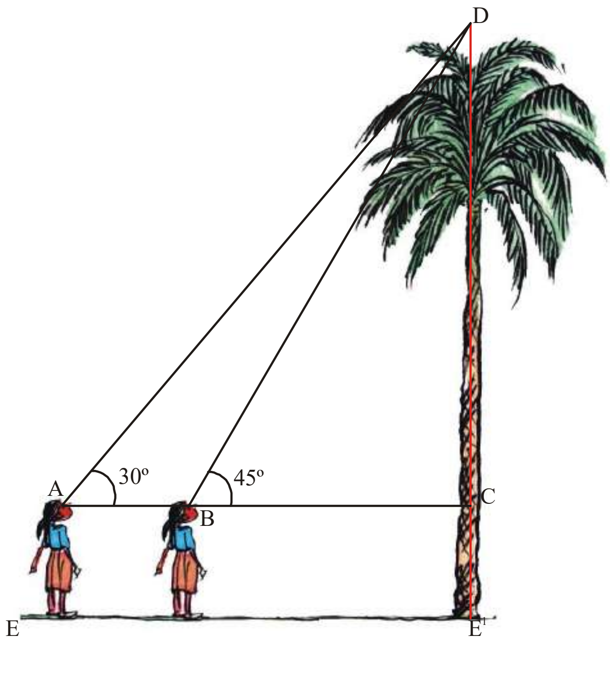



10. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ, AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ ಮತ್ತು $\angle BAC = 30^\circ$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 12.3 ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ ಕೂಡಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭವಿದ್ದರೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

ನೀವು ಒಂದು ತಾಳೆ ಮರವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಆ ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ನೀವು ಆ ಮರವನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪರಿಶೀಲನೆ ಸ್ಥಾನಗಳಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೀರಿ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.




ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತೀರಿ. ನೀವು ಒಂದು ತಾಳೆ ಮರದ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯನ್ನು $45^\circ$ ಉನ್ನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆ ತಾಳೆ ಮರವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ 11 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ದೂರ ಹೋದ ನಂತರ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30^\circ$ ಬದಲಾಗಿದೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ..

ಆ ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೀವೋ ನೋಡೋಣ?

ಚಿತ್ರದಿಂದ

$AB = 11$ ಮೀ

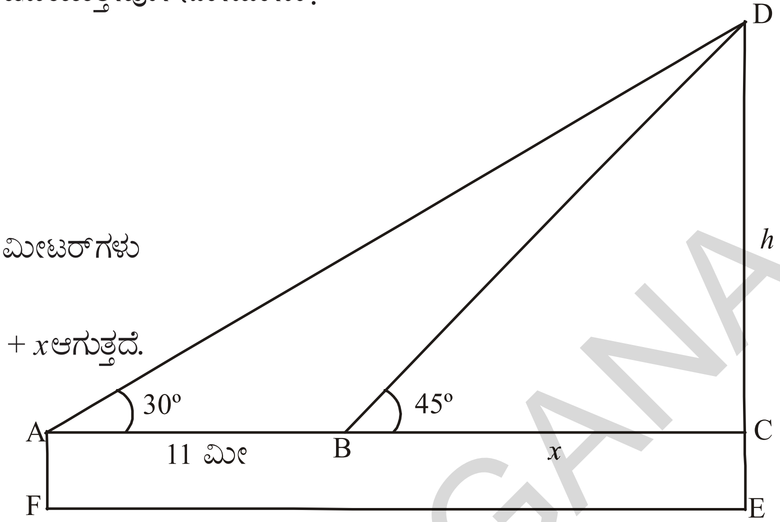
$\angle DAC = 30^\circ$

$\angle DBC = 45^\circ$

ತಾಳೆ ಮರದ ಎತ್ತರ $D = h$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು

BC ಉದ್ದ $= x$

$AC = 11 + x$ ಆಗುತ್ತದೆ.




ತ್ರಿಭುಜ BDC ಯಿಂದ

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h\sqrt{3} \qquad \ldots(1)$$

ತ್ರಿಭುಜ ADC ಯಿಂದ

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\left(\sqrt{3}-1\right)} \text{ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.}$$

**ಗಮನಿಸಿ:** ತಾಳೆ ಮರದ ಎತ್ತರ $CD + CE$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $CE = AF$ ಬಾಲಕಿಯ ಎತ್ತರ

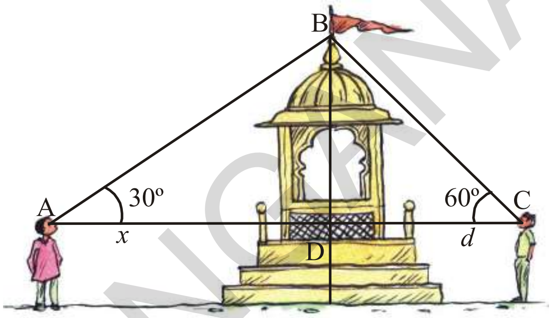
**ಉದಾಹರಣೆ -6.** 30 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಗುಡಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಇರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು $30^o$ ಮತ್ತು $60^o$ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಚಿತ್ರದಿಂದ, ದೇವಾಲಯದ ಎತ್ತರ BD = 30 ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

ಮೊದಲನೆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ ಉನ್ನತಕೋನ $\angle BAD = 30^o$

ಎರಡನೆ ವ್ಯಕ್ತಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ ಉನ್ನತಕೋನ $\angle BCD = 60^o$

ಮೊದಲನೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಡಿ ದೂರ $= x$ , ಎರಡನೆ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಗುಡಿದೂರ CD $= d$ ಎಂದುಕೊಂಡರೆ,




$\Delta BAD$ ಯಿಂದ

$$\tan 30^o = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \quad ..........\ (1)$$

$\Delta BCD$ ಯಿಂದ

$$\tan 60^o = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \quad ..........\ (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಗಳಿಂದ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಮಧ್ಯದೂರ = BC + BA = $x + d$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

**ಉದಾಹರಣೆ -7.** ಒಂದು ಟವರ್ ಪಾದದವರೆಗೆ ಒಂದು ನೇರವಾಗಿರುವ ರಹದಾರಿ ಇದೆ. ಆ ಟವರ್ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ರಾಮಯ್ಯ ಎಂಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ದೂರದಿಂದ ಬರುವ ಕಾರನ್ನು $30^o$ಗಳ ಅವನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದನು. ಒಂದೇ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಬರುತ್ತಿರುವ ಆ ಕಾರನ್ನು 6 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ನಂತರ $60^o$ ಅವನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿದನು. ಈ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಕಾರು ಟವರನ್ನು ಸೇರಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲವೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :**

6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕಾರು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರ = AB = $x$ ಮೀಟರುಗಳು.

ಟವರ್ ಎತ್ತರ CD = $h$ ಮೀಟರುಗಳು

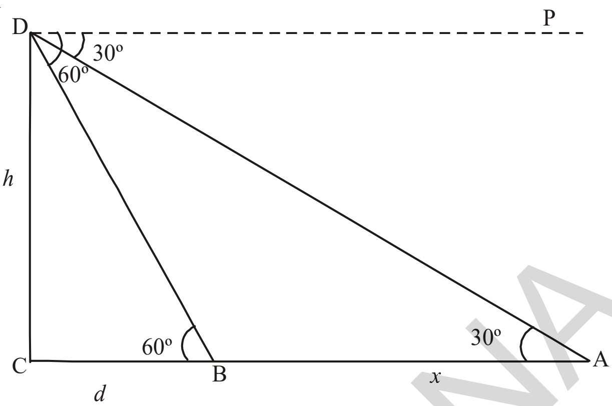
ಕಾರು ಪ್ರಯಾಣಿಸಬೇಕಾದ ಉಳಿದ ದೂರ BC = $d$ ಮೀಟರುಗಳು

AC = AB + BC = $(x + d)$ ಮೀಟರುಗಳು

$\angle PDA = \angle DAC = 30^o$ (ಏಕೆ?)

$\angle PDB = \angle DBP = 60^o$ (ಏಕೆ?)

$\Delta BCD$ ಯಿಂದ




$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \qquad ...(1)$$

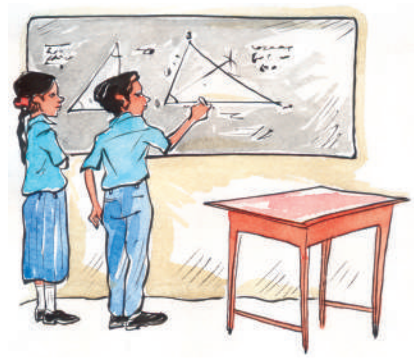
$\Delta ACD$ಯಿಂದ

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$$

(1) & (2) ಯಿಂದ



$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$

'$x$' ಮೀಟರುಗಳ ದೂರ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಹಿಡಿದ ಕಾಲ = 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು

'$d$' = $\frac{x}{2}$ ಮೀಟರುಗಳು ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಹಿಡಿಯುವ ಕಾಲ = 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2

1. ಒಂದು TV ಟವರ್ ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ರಸ್ತೆಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಟವರ್‌ನ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತುದಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ $30^0$ ಉನ್ನತ ಕೋನವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಟವರ್ ಪಾದ ಮತ್ತು ಈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 10 ಮೀಟರ್ ದೂರ ಸರಿದ ನಂತರ ಟವರ್‌ನ ಮೇಲ್ತುದಿ $30^\circ$ ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಟವರ್ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ದಾರಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. 1.5 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಬಾಲಕ 30 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಎತ್ತರವಿರುವ ಗುಡಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು ಇದ್ದ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ ನಡೆದರೆ ಗುಡಿ ಗೋಪುರದ ತುದಿ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ $30^o$ ಯಿಂದ $60^o$ ಗೆ ಬದಲಾಗಿದೆ ಅವನು ನಡೆದ ದೂರವೆಷ್ಟು?

3 ಒಂದು ವಿಗ್ರಹ 2 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಪೀಠದ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ವಿಗ್ರಹದ ಮೇಲ್ಭಾಗ $60^o$ ಮತ್ತು ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗ $45^o$ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಆಗಿವೆ.. ವಿಗ್ರಹದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

4. ಒಂದು ಭವನದ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಸೆಲ್ ಟವರ್ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ $60^o$ ಉನ್ನತ ಕೋನ, ಅದರ ಪಾದ $45^o$ ಅವನತ ಕೋನ ಆಗಿವೆ, ಭವನದಿಂದ ಟವರ್‌ಗೆ ಇರುವ ನಡುವಿನ ದೂರ 7 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಆದರೆ ಆ ಟವರ್‌ನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ನೆಲದೊಂದಿಗೆ $30^o$ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಆಗಿರುವಂತೆ 18 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಧೃಡವಾದ ಲೋಹದ ತಂತಿ ಆಧಾರವಾಗಿ ಒಂದು ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯ ಉದ್ದ ಬಹಳ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ತಂತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಉಳಿದಿದ್ದನ್ನು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ $60^o$ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದ ನಂತರ ಉಳಿದ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

6. ಒಂದು ಟವರ್‌ನ ಕೆಳ ಭಾಗದಿಂದ ಭವನದ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30^o$ ಆಗಿದೆ. ಭವನದ ಕೆಳ ಭಾಗದಿಂದ ಟವರ್‌ನ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗಉನ್ನತ ಕೋನ $60^o$ ಆಗಿದೆ. ಟವರ್ ಎತ್ತರ 30 ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಆದರೆ, ಭವನದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. 120 ಅಡಿಗಳ ಅಗಲವಾಗಿರುವ ದಾರಿಗೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಸಮ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ದಾರಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅವುಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು $60^o$ ಮತ್ತು $30^o$ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಆ ಸ್ತಂಭಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಸ್ತಂಭ ಕೆಳಭಾಗಗಳಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಟವರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುವ 4 ಮೀಟರುಗಳು ಮತ್ತು 9 ಮೀಟರುಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಟವರ್ ತುದಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕಗಳು. ಟವರ್ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿರುವ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಜೆಟ್ ವಿಮಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಉನ್ನತಕೋನ $60^o$ ಆಗಿದೆ. 15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಅದರ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30^o$ ಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಜೆಟ್ ವಿಮಾನ $1500\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರುತ್ತಾ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $\left(\sqrt{3}=1.732\right)$

10. ಒಂದು ಭವನದ ಕೆಳಭಾಗದಿಂದ ಟಾವರ್‌ನ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30^0$ ಮತ್ತು ಟಾವರನ ಕೆಳಭಾಗದಿಂದ ಭವನದ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಉನ್ನತ ಕೋನ $60^0$. ಆದರೆ ಟಾವರನ ಮತ್ತು ಭವನದ ಎತ್ತರಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ

**[ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಉದ್ದೇಶಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ]**

1. 1.2 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಬಾಲಕಿ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತವಾಗಿ, 88.2 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದೊಂದಿಗೆ ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಿರುವ ಬೆಲೂನನ್ನು $60^{\circ}$ ಉನ್ನತ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಗಮನಿಸಿದಳು. ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಆ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30^{\circ}$ ಯಾಗಿ ಬದಲಾಗಿದೆ. ಆ ಮಧ್ಯ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಬೆಲೂನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದ ದೂರವೆಷ್ಟು?
2. ಒಂದು ಭವನದ ಪಾದದಿಂದ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಟವರ್‌ನ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಉನ್ನತ ಕೋನ $30^{\circ}$ ಆಗಿದೆ. ಟವರಿನ ಪಾದದಿಂದ ಭವನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಉನ್ನತ ಕೋನ $60^{\circ}$ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ?
3. A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಹಡಗುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಸುತ್ತಾ ಲೈಟ್‌ಹೌಸ್‌ಕಡೆಗೆ ಬರುತ್ತಿವೆ. ಆ ಹಡಗುಗಳಲ್ಲಿನಿಂದ ಲೈಟ್‌ಹೌಸ್ ಮೇಲ್ಭಾಗಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $a$, $2a$, ಮತ್ತು $3a$ ಆಗಿವೆ. A ಮತ್ತು B ಹಡಗುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ '$x$' ಆದರೆ ಲೈಟ್‌ಹೌಸ್ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು
4. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಗೂಡಿನ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು $1:1:\sqrt{2}$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಆ ಗೂಡಿನಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುವ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಕಟ್ಟಿಗೆ, ಅದರ ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವೆಷ್ಟು?
5. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರ ಲೋಹದ ಚೆಂಡುವಿನ ಘನಫಲ 232848 ಸೆಂ.ಮೀ$^3$ ಅದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ $120^{\circ}$ ಶೃಂಗಕೋನ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ್ದಾರೆ. ಅದರ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :**

**ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದ.**

★ "ಕ್ಲಿನೋಮೀಟರ್ - ತಯಾರಿಕೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಮರ/ಭವನ/ಟವರ್‌ನ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು - ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ನಾವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

1. (i) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡುತ್ತಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ನೋಡುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೂ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
   (ii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದು(ವಸ್ತುವು) ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಗಿಂತ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
   (iii) ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದು(ವಸ್ತುವು) ಕ್ಷಿತಿಜ ಅಥವಾ ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಗಿಂತ ಕೆಳಗಿದ್ದಾಗ, ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಅವನತ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
2. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಉದ್ದವಾಗಲಿ, ಎತ್ತರವಾಗಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾ ಇರುತ್ತೇವೆ.

# ಅಧ್ಯಾಯ 13 ಸಂಭವನೀಯತೆ (Probability)

## 13.1 ಪರಿಚಯ :

ಕುಮಾರ್ ಹಾಗೂ ಸುಧ ಇಬ್ಬರೂ ಕೇರಂ ಆಟದ ಬಗ್ಗೆ ಹೀಗೆ ಸಂಭಾಷಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ .

**ಕುಮಾರ್** : ಈ ಆಟದಲ್ಲಿ ನಾವು ಗೆಲ್ಲುತ್ತೇವೆಂದು ನೀನು ಭಾವಿಸುತ್ತಿರುವೆಯಾ ?

**ಸುಧ** : ಗೆಲುವಿಗೆ 50 ಪ್ರತಿಶತ (ಶೇಕಡಾ) ಅವಕಾಶಗಳಿವೆ. ಬಹುಶಃ ನಾವು ಗೆಲ್ಲಬಹುದು.

**ಕುಮಾರ್** : 50 ಪ್ರತಿಶತ ಗೆಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶಗಳಿವೆಯೆಂದು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಲ್ಲೆ ?

ಈ ಸಂಭಾಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಸುಧಾಳ ಮಾತುಗಳು ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸುವಿರಿ ?

ಆಕೆಯ ಗೆಲುವಿಗೆ 50% ಶೇಕಡಾ ಅವಕಾಶಗಳಿವೆಯೇ ?

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ. **ಬಹುಶಃ** (Probably), **ಅವಕಾಶ** (Likely), **ಸಾಧ್ಯತೆ** (Possibly) ಮುಂತಾದ ಪದಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿಯೋಣ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಸಂಭವ ಅಥವಾ ಖಚಿತ ಘಟನೆ ಮತ್ತು ಪೂರ್ತಿ ಅಸಂಭವ ಇಲ್ಲವೇ ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಇನ್ನಷ್ಟು ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕುರಿತು, ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಅಂತ್ಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇರಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವಿಸುವಿಕೆಯ ಪರಿಮಾಣೀಕರಣದ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಪರಿಮಾಣೀಕರಣವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದನ್ನೇ ಸಂಭವನೀಯತೆ (Probability) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

### 13.1.1 ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಂದರೇನು ? (What is Probability) :

ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 1000 ಬಾರಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ 455 ಸಲ **ರಾಜ** (Heads) 545 ಸಲ ರಾಣಿ (Tail) ಬಿದ್ದಿತು. ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಮಾಣೀಕರಿಸಿದರೆ 1000ಕ್ಕೆ 455 ಸಲ ಎಂದರೆ $\frac{455}{1000} = 0.455$.

ಹೀಗೆ ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಆದರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಆಧಾರ, ಎಂದರೆ ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು 1000 ಬಾರಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಇಂತಹುದೇ ಸಂಭವಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು. ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಆಗಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿ ರಾಜ (Heads) ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಊಹಿಸುವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪ್ರಪಂಚದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದಲೂ ಎಷ್ಟೋ ಜನರು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 18ನೇಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರೆಂಚ್ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಕಾಮ್ಟೆ, ಡಿ. ಬಫನ್ ನಾಣ್ಯವನ್ನು 4040 ಬಾರಿ ಮೇಲೆ ಎಸೆದು 2048 ಸಲ ರಾಜ ಬಿದ್ದಂತೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{2048}{4040} = 0.507$ (ಸುಮಾರು)

ಬ್ರಿಟನ್ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಜೆ.ಇ. ಕೆರಿಚ್ ನಾಣ್ಯವನ್ನು 10000 ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿ 5067 ಸಲ ರಾಜ ಬಿದ್ದಿತೆಂದು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದನು. ಅಂದರೆ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{5067}{10000} = 0.5067$. ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಕಾರ್ಲ್‌ಪಿಯರ್‌ಸನ್ 24000 ಬಾರಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿ 12012 ಸಲ ರಾಜ ಬಿದ್ದಿತೆಂದು ಲೆಕ್ಕಿಸಿದನು. ಅಂದರೆ ಇವನ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{12012}{24000} = 0.5005$.

ನಾವೀಗ ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ಸಲವೋ ಅಥವಾ ಒಂದು ಕೋಟಿ ಸಲವೋ ಮಾಡಿ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಲ್ಲಿ, ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆದರಿಸಿ ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ 0.5 ಅಥವಾ $\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡದೆಯೇ ಇತರ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆದರಿಸಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನೇ '**ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ**' (Theoretical Probability) ಅಥವಾ '**ಸಾಂಪ್ರದಾಯಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ**' (Classical Probability) ಎನ್ನುವರು.

ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಕೆಲವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

## 13.2 ಸಂಭವನೀಯತೆ – ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವಿವರಣೆ PROBABILITY - A THEORETICAL APPROACH)

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾಗಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ನಾಣ್ಯವು ಸಮಮಿತಿವಾಗಿದ್ದಾಗ ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಹೆಚ್ಚು, ಯಾವುದು ಕಡಿಮೆ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೂ ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ನಿಷ್ಪಾಕ್ಷಿಕವೆಂದೂ, ಚಿಮ್ಮುವುದನ್ನು **ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ**ವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ರಾಜ, ರಾಣಿಗಳನ್ನು **ಸಮ ಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳು**(Equally likely Events) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪಾಠ್ಯಾಂಶದಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಫಲಿತಗಳು ಸಮ ಸಂಭವಗಳೆಂದೂ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿರೂಪ ಆವರಣ ಪರಿಮಿತವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಣ್ಯ ಅಥವಾ ದಾಳವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ನಿಷ್ಪಾಕ್ಷಿಕವೆಂದು ಭಾವಿಸಬೇಕು.

**ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

a. ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಫಲಿತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಸಂಭವಗಳು?

1. ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 1, 2, 3, 4, 5 ಅಥವಾ 6 ಬೀಳುವುದು.
2. 5 ಕೆಂಪು, 4 ನೀಲಿ, 1 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿರುವ ಚೀಲಗಳಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯುವುದು.

3. ಕೇರಂ ಆಟವನ್ನು ಗೆಲ್ಲುವುದು.
4. ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನವು 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಅಥವಾ 9 ಆಗುವುದು.
5. 10 ಕೆಂಪು, 10 ನೀಲಿ, 10 ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣಗಳ ಚೆಂಡುಗಳಿರುವ ಚೀಲದಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯುವುದು.
6. ಜುಲೈ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ ಮಳೆ ಬೀಳುವುದು.

b. ಮೇಲಿನ ಘಟನೆಗಳ ಫಲಿತಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಭವಗಳೇ ?

c. ಫಲಿತಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಭವಗಳಾಗಿರುವ ಐದು ಘಟನೆಗಳನ್ನು , ಸಮಸಂಭವಗಳಲ್ಲದ ಐದು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ :**

(i) ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 50 ಸಲ, 100 ಸಲ, 150 ಸಲ ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ರಾಜ ಮತ್ತು ರಾಣಿ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ, ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ .

| ಕ್ರ. ಸಂ. | ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ | ರಾಜ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ | ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ | ರಾಣಿ ಬಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ | ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 50 | | | | |
| 2. | 100 | | | | |
| 3. | 150 | | | | |

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ನೀವೇನು ಗಮನಿಸಿದ್ದಿರಿ ? ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ 50% ಗೆ ಅಂದರೆ $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿರುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲವೇ ? ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿ ಮಾಡಬಲ್ಲ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಇಂತ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಘಟನೆಯ E ಪ್ರಯೋಗಿಕ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ P(E) ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಬಳಸುವ ಸೂತ್ರ

$$P(E) = \frac{\text{ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವಿಸುವ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನಗಳು}}{\text{ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

## ಸಂಭವನೀಯತೆ – ಮಾದರಿ ಪ್ರಯೋಗ (Probability and Modelling)

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದರಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ್ಯೂ, ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಗಳ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಮಿತಿಗಳು, ಸಾಧ್ಯಾಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಕೃತಕ ಉಪಗ್ರಹವನ್ನು ಅಂತರಿಕ್ಷದೊಳಕ್ಕೆ ಕಳಿಸುವುದರ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು, ಭೂ ಕಂಪದ ಪ್ರಭಾವಕ್ಕೆ ಹಲವು ಅಂತಸ್ತಿನ ಭವನವು ಕುಸಿದು ಹೋಗದಂತೆ ಇರುವ

ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಹಲವು ಪ್ರಯತ್ನಗಳನ್ನು ನಾವು ಮಾಡಲಾರೆವು. ಫಲಿತಗಳಿಂದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾರೆವು ಅಲ್ಲವೇ ! ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಹ ಸಂಘಟನೆಗಳನ್ನು ಕೃತಕವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ ಇಲ್ಲವೇ ಊಹಿಸಿ ಉಂಟಾಗುವ ವಿವಿಧ ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆ ಮಾಡಿ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಂತಹ ಮಾದರಿ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆಯು ಆ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಎಚ್ಚರಿಕೆಗಳು, ಊಹಿಸಿದ ಫಲಗಳ ಹಾಗೂ ಘಟನೆಯ ಫಲಿತಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ವಾತಾವರಣದ ಎಚ್ಚರಿಕೆಗಳು, ಜನಸಂಖ್ಯಾ ವಿಕಾಸ, ಭೂಕಂಪಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಮುನ್ನೆಚ್ಚರಿಕೆಗಳು, ಬೆಳೆಗಳ ಇಳುವರಿ ಮೊದಲಾದವನ್ನು ಮಾದರಿ ಸಂಘಟನೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿ ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುವ ಮೂಲಕ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು, ಮುಂತಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ " ಸಮಸಂಭವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು "ಎಂಬ ಊಹೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ನಿರ್ವಚನೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

T ಎಂಬ ಘಟನೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ (ಅಥವಾ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು $P(T)$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

ಎಂದರೆ $P(T) = \dfrac{\text{ಒಂದು ಘಟಗೆ T ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳು}}{\text{ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು}}$ ಎಂದು ನಿರ್ವಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 'ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭಾವನೀಯತೆ ' ಯನ್ನು 'ಸಂಭವನೀಯತೆ ' ಎಂದು ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು *1795* ರಲ್ಲಿ ಪೆರ್ರೀ ಸಿಂಪ್ಸನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲೆಸ್ ನಿರ್ವಚಿಸಿದನು.

ಪೆರ್ರೀ ಸಿಂಪ್ಸನ್ ಲ್ಯಾಪ್ಲೆಸ್
(1749 – 1827)

16ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೆ. ಕಾರ್ಡಾನ್ ಎಂಬ ಇಟಲಿಯ ಶರೀರ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಮತ್ತು ಗಣಿತಜ್ಞನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೊದಲ ಪುಸ್ತಕ 'The Book on Games of of Chance' ವನ್ನು ಬರೆಯುವುದರೊಂದಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಒಂದು ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿ ಉದ್ಭವಿಸಿತು. ಜೇಮ್ಸ್ ಬರ್ನೋಲಿ (1654 -1705), ಎ.ಡಿ. ಮೊವಿಯರ್ (1667-1754) ಮತ್ತು ಪೆರ್ರೀ ಸಿಂಪ್ಸನ್ ಇವರುಗಳು ಸಹ ಸಂಭಾವನೀಯತೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಗಮನಾರ್ಹ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದವರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ವರ್ತಮಾನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚಿ ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, ತಳಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರ, ಆರ್ಥಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಂತಹ ಇತರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

## 13.3 ಪರಸ್ಪರ ವರ್ಜ್ಯ ಘಟನೆಗಳು (Mutually Exclusive Events)

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ರಾಜ ಇಲ್ಲವೇ ರಾಣಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಸಂಭವಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೂ, ಆತನು 6, 7, 8, 9 ಅಥವಾ 10 ನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ತರಗತಿ ಮಾತ್ರ ಸೇರಿರುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದ ಘಟನೆ ಒಂದು ಫಲಿತವಾದರೆ ಉಳಿದ ಫಲಿತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಸಂಭವಗಳೇ. ಇಂತಹ ಸಂಘಟನೆಗಳನ್ನು ವರ್ಜ್ಯ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವಿಸುವಿಕೆಯು, ಮತ್ತೊಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತಡೆಯಬೇಕು ಅಥವಾ ವ್ಯರ್ಜಿಸಬೇಕು, ಆ ಘಟನೆಗಳನ್ನು **ಪರಸ್ಪರ ವರ್ಜ್ಯ ಘಟನೆಗಳು** (Mutually Exclusive Events) ಎನ್ನುವರು.

### 13.4.1 ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವಿಕೆ (FINDING PROBABILITY) :

ಸಮಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ ? ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆ ಎಂಬುದು ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳಿರುವ ಪ್ರಯೋಗವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ ಎರಡು ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಗಳ ಗಣವನ್ನು '**ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ**'(Sample Space) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬರುವ ಪ್ರತಿರೂಪ ಆವರಣ {H, T}. ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಹಳದಿ ಮತ್ತು ಬಿಳುಪು ಚೆಂಡುಗಳಿರುವ ಚೀಲದಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಪ್ರತಿರೂಪ ಆವರಣ {R, B, Y, W}. ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ **ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವನ್ನು** ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ**

ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಗಳಿರುವ ಐದು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ ಅವುಗಳ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಸಮಸಂಭವನೀಯತೆ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ವರ್ಜ್ಯ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಗಮನಿಸಬಹುದೋ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-1.** ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ರಾಣಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಫಲಿತಗಳು ಎರಡು, ರಾಜ (H) ಅಥವಾ ರಾಣಿ (T) ರಾಜ ಬೀಳುವ ಘಟನೆ E ಆದರೆ ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತ 1.

$$P(E) = P(\text{ರಾಜ}) = \frac{E\text{ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{1}{2}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಾಣಿ ಎಂಬುವ ಘಟನೆ F ಆದರೆ

$P(F) = P(\text{ರಾಣಿ}) = \frac{1}{2}$ (ಏಕೆಂದು ಚರ್ಚಿಸಿರಿ)

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು, ಒಂದು ನೀಲಿ ಚೆಂಡು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಚೆಂಡುಗಳು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣ ಹೊಂದಿವೆ. ಚೀಲದಲ್ಲಿನ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ನೋಡದಂತೆಯೇ ಮಾನಸ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಆ ಚೆಂಡು (i) ಹಳದಿ ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡು (ii) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡು (iii) ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಮಾನಸ ನೋಡದಂತೆಯೇ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದಾಳೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು, ಹಳದಿ ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆ Y, ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆ B ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣವನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆ R ಆದರೆ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ = {Y, B, R, } ಫಲಿತಗಳು = 3.

(i) Y ಗೆ ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತ = 1.

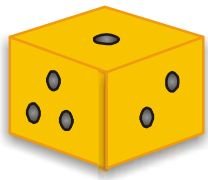
So, $P(Y) = \frac{1}{3}$ .ಅದೇ ರೀತಿ $P(R) = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $P(B) = \frac{1}{3}$

**ಪರಿಶೀಲನೆಗಳು**

1. ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತಗಳು ಒಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಆದರೆ ಅದನ್ನು **ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ** (Elementary Event) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. 1ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ E ಮತ್ತು F ಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳು. ಇದರಂತೆಯೇ 2ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ Y, B ಮತ್ತು R ಗಳು ಸಹ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳೇ.
2. ಒಂದನೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ : $P(E) + P(F) = 1$
   ಅದೇ ರೀತಿ ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$.
   ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗುತ್ತದೆ.
3. ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ 3 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಲೀ ಇಲ್ಲವೇ 3 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಳುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಲೀ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳು ಅಲ್ಲ, ಆದರೆ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ {HH}, {HT}, {TH} ಮತ್ತು {TT} ಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳು.

**ಉದಾಹರಣೆ-3.** ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ (i) 4ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಳುವ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ (ii) 4 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** (i) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ



ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳು $n(S) = 6$

' 4ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ' ಎನ್ನುವ ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳು $E = \{5, 6\}$

E ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(E) = 2$

∴ ಘಟನೆ E ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) F ಎನ್ನುವ ಘಟನೆ 4ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುವುದಾದರೆ,

ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳು $n(S) = 6$

F ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $F = \{1, 2, 3, 4\}$

ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(F) = 4$

ಘಟನೆ F ನ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**ಸೂಚನೆ :** ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ E ಮತ್ತು Fಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳೇ ?

ಅಲ್ಲಿ ಘಟನೆ E ಗೆ ಫಲಿತಗಳು 2, ಘಟನೆ F ಗೆ ಫಲಿತಗಳು 4 ಆದ್ದರಿಂದ E, F ಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳು.

## 13.4.2 ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು – ಸಂಭವನೀಯತೆ (Complementary Events and Probability)

ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಆದರೆ ಉದಾಹರಣೆ-3 ರಲ್ಲಿನ ಘಟನೆಗಳು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಅವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ E, Fಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಘಟನೆಗಳು.

'F' ಮತ್ತು 'E ಅಲ್ಲದು' ಸಮಗಳು. 'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು $\overline{E}$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು E ಘಟನೆಯ ಪೂರಕ ಘಟನೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

$\therefore$ P(E) + P(E ಅಲ್ಲದ್ದು) = 1

ಅಥವಾ $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ ಇದರಿಂದ $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ **E** ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಘಟನೆಯಾದರೆ $\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

(i) ರಾಜ ಬೀಳುವುದು ರಾಣಿ ಬೀಳುವುದಕ್ಕೆ ಪೂರಕ ಘಟನೆಯೇ ? ಕಾರಣ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(ii) ದಾಳದಿಂದ 1 ಬೀಳುವುದು ಎಂಬುದು 2, 3, 4, 5, 6 ಬೀಳುವಿಕೆಯ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳೇ ?

(iii) ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳಾಗುವ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ಐದು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

## 13.4.3 ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ, ಖಚಿತ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆಗಳು (Impossible and Certain Events) :

1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿರುವ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದ್ದೇವೆಂದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(i) ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 7 ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎನ್ನುವ ಫಲಿತಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಸಂಭವನೀಯಗಳು ಆದರೆ 7 ಗುರ್ತಿಸಿರದ ಕಾರಣ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತ ಶೂನ್ಯವು. E = ಮುಖದ ಮೇಲೆ 7 ಬರುವದು.

$$\therefore \quad P(E) = \frac{0}{6} = 0$$

ಅಂದರೆ 7 ಬೀಳುವುದು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಘಟನೆಯನ್ನು **ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

(ii) ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 6 ಅಥವಾ 6 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಕಡೆ 6 ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಕಡೆ 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗುರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 6 ಇಲ್ಲವೇ 6 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ.

P(E) = P(6 ಇಲ್ಲವೇ 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೀಳುವುದು ) $= \frac{6}{6} = 1$

ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಖಚಿತವಾದದ್ದು ಹಾಗೂ ಸಂಭವನೀಯತೆ '1' ಇಂತಹ ಘಟನೆಗಳನ್ನೇ ಖಚಿತ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. **(Sure Event** or a **Certain Event)**

***ಸೂಚನೆ*** : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಲ್ಲಗಳಿಂದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನೆಯಲ್ಲಿ **P(E)** $= \mathbf{\frac{n(E)}{n(S)}}$ ನಲ್ಲಿನ ಅಂಶವು ಯಾವಾಗಲೂ ಛೇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇಲ್ಲವೇ ಛೇಧದಷ್ಟೇ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ಒಂದು ಮಗುವಿನ ಬಳಿ ಇರುವ ದಾಳದ ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ A, B, C, D, E ಮತ್ತು F ಎಂದು ಮುದ್ರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಆ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ (i) A? (ii) D ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.
2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

   (a) 2.3 (b) -1.5 (c) 15% (D) 0.7

**ಆಲೋಚಿಸಿ - ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ :**

1. ಯಾವುದಾದರೂ ಆಟದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗುಂಪಿನವರು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಲು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು ನಿಷ್ಪಾಕ್ಷಿಕವೆಂದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಏಕೆ ?
2. ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{7}{2}$ ಇರುವುದೇ ? ವಿವರಿಸಿರಿ.
3. ಕೆಳಗಿನ ವಾದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸತ್ಯವಾದವುಗಳು ?

   i) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಮೂರು ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಎರಡು ರಾಜ, ಎರಡು ರಾಣಿ, ಒಂದು ರಾಜ ಮತ್ತೊಂದು ರಾಣಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಫಲಿತದ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{1}{3}$.

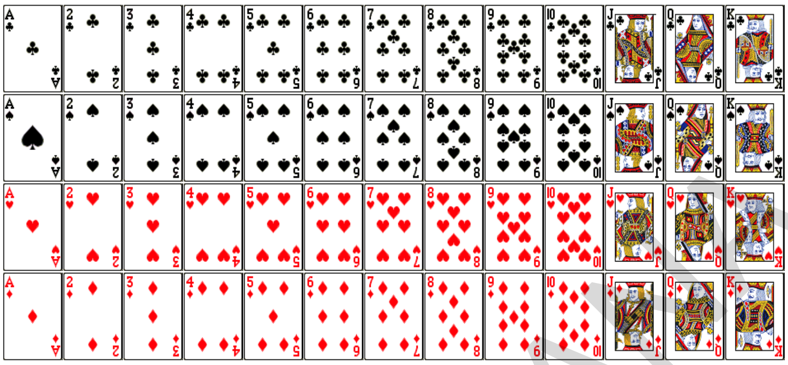
   ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಬೀಳುವುದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲವೇ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{1}{2}$.

## 13.5 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ - ಸಂಭವನೀಯತೆ (Deck of Cards and Probability)

ನೀವು ಎಂದಾದರೂ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುವಿರಾ?

ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು 13 ಕಾರ್ಡಿನಂತೆ 4 ವಿಭಾಗಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳೆಂದರೆ ಸ್ಪೇಡ್ (♠), ಕೆಂಪು ಹೃದಯದ ಚಿಹ್ನೆ (♥), ಕೆಂಪು ಡೈಮೆಂಡ್ ಚಿಹ್ನೆ(♦) ಹಾಗೂ ಕಪ್ಪು ಕಳಾವರ್ (♣).

ಒಂದೊಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಏಸ್, ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜಾಕಿ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ಮತ್ತು 2 ಗುರ್ತಿಸಿರುವ 13 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜಾಕಿ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು, ಕೆಲವು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಇಲ್ಲದೇ ಎರಡು ಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಧ ವಿಧ ಆಟಗಳನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಹಂಚುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ, ಎದುರಾಳಿಗಳ ಬಳಿ ಇರುವ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಗೆಲ್ಲಲು ಉಪಾಯ ಕಂಡು ಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.



**ಉದಾಹರಣೆ-4.** ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲ್ಪಟ್ಟ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡಿನ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 52 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯುವಲ್ಲಿ ಅದು (i) ಏಸ್ ಆಗಿರಲು (ii) ಏಸ್ ಆಗದಿರಲು ಇರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಫಲಿತಗಳು

(i) ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 4 ಏಸ್‌ಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾರ್ಡ್ ಏಸ್ ಆಗುವ ಎಂಬ ಘಟನೆ E ಆದರೆ

E ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4

ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 52 (ಹೇಗೋ ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?)

ಕಾರ್ಡ್ ಏಸ್ ಆಗುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾರ್ಡ್ ಏಸ್ ಅಲ್ಲವೆನ್ನುವ ಘಟನೆ F ಆದರೆ ,

F ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 52 - 4 = 48 (ಏಕೆ ?)

ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 52

ಕಾರ್ಡ್ ಏಸ್ ಆಗದಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ , $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

**ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ :** ಘಟನೆ F ಎಂದರೆ E ಅಲ್ಲದ್ದು ($\overline{E}$) ಆದ್ದರಿಂದ

ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ F ನ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

$$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ ಒಂದು ಕಟ್ಟು ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್

1. ರಾಣಿ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

2. ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
3. ಸ್ಪೇಡ್ ಕಾರ್ಡ್ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
4. ಸ್ಪೇಡ್, ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
5 ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್ ಆಗದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

### 13.6 ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಉಪಯೋಗಗಳು (Use of Probability) :

ಸಂಭವನೀಯತೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಆಟದ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ದೇಶಗಳು ತುಂಬಾ ಬಲಾಢ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಬಲಹೀನ ದೇಶಗಳು ಅಲ್ಲವೇ ? ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿನ ಇಬ್ಬರು ಆಟಗಾರರು ಸಮಾನವಾಗಿ ಆಡಬಲ್ಲರೆಂದು ಹೇಳಲಾರೆವು. ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಅಥವಾ ಒಂದು ಗುಂಪು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡನೇಯ ಆಟಗಾರ ಅಥವಾ ಗುಂಪಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು. ನಮ್ಮ ನೆಂಟರು, ಸ್ನೇಹಿತರ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳು ಒಂದೇ ದಿನ ಬರುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಬರುವುದು ಸಾಧಾರಣವೇ ? ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವೇ ? ಅವಕಾಶಗಳೆಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ? ಮುಂತಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ, ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ, ಪ್ರಮಾಣೀಕರಣ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-5.** ಸಂಗೀತ, ರೇಷ್ಮಾರವರುಗಳು ಟೆನ್ನಿಸ್ ಆಟ ಆಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಸಂಗೀತಳು ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0.62 ಆದಾಗ ರೇಷ್ಮಾ ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಸಂಗೀತ, ರೇಷ್ಮಾ ಇಬ್ಬರೂ ಆಟ ಗೆಲ್ಲುವ ಘಟನೆಗಳು S , R ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಸಂಗೀತ ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = P(S) = 0.62 (ದತ್ತಾಂಶ )

ಪೂರಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಪ್ರಕಾರ ರೇಷ್ಮಾ ಗೆಲ್ಲುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ = P(R) = 1 - P(S)

= 1 -0.62 = 0.38 [R ಮತ್ತು S ಗಳು ಪೂರಕಗಳು]

**ಉದಾಹರಣೆ-6.** ಶಾರದ, ಹಮೀದ್ ಉತ್ತಮ ಸ್ನೇಹಿತರು, ಅವರಿಬ್ಬರ ಹುಟ್ಟಿದ ಹಬ್ಬದ ದಿನಗಳು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ (ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲ) (i) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿನ ಬರಲು ? (ii) ಒಂದೇ ದಿನ ಬರುವುದಕ್ಕೆ ಇರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ 365 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಯಾರ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನವಾದರೂ ಯಾವ ದಿನವಾದರೂ ಬರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು 365 ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

(i) ಶಾರದ, ಹಮೀದ್ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿನಗಳಾಗಲು ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತಗಳು 365 - 1 = 364

$$\therefore \; P\left(\text{ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳು}\right) = \frac{364}{365}$$

(ii) P(ಒಂದೇ ದಿನ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳು ) = 1 - P (ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳು)

$$= 1 - \frac{364}{365} \; [\; P(\overline{E}) = 1 - P(E) \text{ ಸಹಾಯದಿಂದ}] = \frac{1}{365}$$

**ಉದಾಹರಣೆ-7.** 40 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 25 ಜನ ಬಾಲಕಿಯರು 15 ಮಂದಿ ಬಾಲಕರಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಯನ್ನು ನೇಮಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ, ಅವರ ಉಪಾಧ್ಯಾಯಿನಿಯು ಎಲ್ಲರ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾಗಿ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಮೇಲೆ ಬರೆದು, ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿ, ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಹೆಸರು (i) ಬಾಲಕಿ ಇಲ್ಲವೇ (ii) ಬಾಲಕನದ್ದು ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದರೆ 40 ಜನರಲ್ಲಿ ಯಾರ ಹೆಸರಿನ ಕಾರ್ಡ್ ಆದರೂ ಬರಬಹುದು.

ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =40

(i) ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡಿನಮೇಲೆ ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಿರಲು ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 25 (ಏಕೆ ?)

$\therefore$ P (ಬಾಲಕಿಯ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್) = P(ಬಾಲಕಿ) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಿರಲು ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 15 (ಏಕೆ ?)

$\therefore$ P(ಬಾಲಕನ ಹೆಸರಿರುವ ಕಾರ್ಡ್) = P(ಬಾಲಕ) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

ಅಥವಾ P(ಬಾಲಕಿ) = 1 - P(ಬಾಲಕ ನಲ್ಲದ್ದು) = 1 - P(ಬಾಲಕಿ) = $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 13.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಿರಿ :

(i) ಘಟನೆ Eಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ + ಘಟನೆ E ಅಲ್ಲದ ಸಂಭವನೀಯತೆ = ______________

(ii) ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಾದರೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ __________
ಅದನ್ನು __________ ಘಟನೆ ಎನ್ನುವರು.

(iii) ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ __________
ಅದನ್ನು _________ ಘಟನೆ ಎನ್ನುವರು.

(iv) ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೊತ್ತವು __________.

(v) ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಯಾವಾಗಲೂ __________ ಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮಾನ ಮತ್ತು _______ ಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇಲ್ಲವೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದರ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳು ? ವಿವರಿಸಿರಿ.

(i) ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಕಾರು ಸ್ಟಾರ್ಟ್ ಆಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ.

(ii) ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲನ್ನು ಹೊಡೆಯದೇ ಹೋದರೆ ಅದು ತಗುಲುವುದು ಅಥವಾ ತಗಲದಿರುವುದು.

(iii) ಸರಿ–ತಪ್ಪು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆದಾಗ ಅದು ಸರಿಯಾಗಬಹುದು, ಸರಿಯಾಗದೇ ಹೋಗಬಹುದು

(iv) ಹುಟ್ಟಿದ ಹಸುಗೂಸು ಗಂಡು ಅಥವಾ ಹೆಣ್ಣಾಗುವುದು.

3. $P(E) = 0.05$ ಆದರೆ 'E ಅಲ್ಲದ್ದು' ಎಂಬುದುರ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

4. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ನಿಂಬೆ ವಾಸನೆ ಇರುವ ಚಾಕ್ಲೆಟ್‌ಗಳಿವೆ. ಮಾಲಿನಿಯು ನೋಡದಂತೆಯೇ ಚೀಲದಿಂದ ಒಂದು ಚಾಕ್ಲೆಟ್ ತೆಗೆದರೆ, ಅದು

   (i) ಕಿತ್ತಳೆ ವಾಸನೆ ಹೊಂದಿರುವ ಚಾಕ್ಲೆಟ್ ಆಗಲು? (ii) ನಿಂಬೆ ವಾಸನೆ ಇರುವ ಚಾಕ್ಲೆಟ್ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ?

5. ರಹೀಮ್ ಒಂದು ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಹೃದಯದ ಚಿಹ್ನೆಯ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಹಾಕಿದ್ದಾನೆ. ಈಗ

   i. ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆಯುದ್ದಕೊಂಡರೆ ಅದು ಏಸ್ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
   ii. ಡೈಮೆಂಡ್‌ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
   iii. ಹೃದಯದ ಚಿಹ್ನೆಯಿಲ್ಲದ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆಯುದ್ದಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?
   iv. ಹೃದಯದ ಗುರ್ತಿರುವ ಏಸ್‌ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

6. ಮೂರು ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರ ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ದಿನ ಬಾರದ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0.992 ಆದರೆ ಒಂದೇ ದಿನ ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

7. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಫಲಿತಗಳೊಂದಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) 2, 6ರ ನಡುವಿನಸಂಖ್ಯೆ (iii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ

8. ಒಂದು ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣವಿರುವ ರಾಜ ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

9. ದಾಳಗಳು, ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು, ಹುಟ್ಟಿದ ದಿನಗಳ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಐದು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಿದ್ದಪಡಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ನಿಮ್ಮ ಮಿತ್ರರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

## 13.7 ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಇನ್ನಷ್ಟು ಅನ್ವಯುಗಳು (More Applications of Probability) :

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು, ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಪಾಲಿಸಿದ ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು '1' ಆಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆನಿಗೂ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ, ಅಭ್ಯಾಸದ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಿರಾ? ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿಶೇಷ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-8.** ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 3 ನೀಲಿ, 2 ಬಿಳುಪು, ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು :

(i) ಬಿಳುಪು (ii) ನೀಲಿ (iii) ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳಾಗಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದೇನೆಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳು.

$\therefore$ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 3 + 2 + 4 = 9$ (ಏಕೆ?)

ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆ W ನಿಂದಲೂ ನೀಲಿ ಗೋಲಿಯ ಘಟನೆಯನ್ನು B ನಿಂದ ಹಾಗೂ ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಯನ್ನು R ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ

(i) Wಗೆ ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2$

$\therefore$ $P(W) = \frac{2}{9}$

ಇದೇ ರೀತಿ, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

ಸೂಚನೆ $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

**ಉದಾಹರಣೆ-9.** ಹರ್ಷಿತ್ ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ( ₹1 ಹಾಗೂ ₹2) ಒಂದೇ ಸಲ ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿದನು. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ರಾಜ ಅನ್ನುH ನಿಂದಲೂ ರಾಣಿಯನ್ನುT ನಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಗಳು (H, H), (H, T), (T, H), (T, T), ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳೇ. ಇದರಲ್ಲಿ (H, H) ಎಂದರೆ ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯ (₹1) ರಾಜ ಹಾಗೂ ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯ (₹2) ರಾಜ ಎಂದರ್ಥ. ಇದೇ ರೀತಿ (H, T) ಎಂದರೆ ಮೊದಲ ನಾಣ್ಯ ರಾಜ ಎರಡನೇ ನಾಣ್ಯ ರಾಣಿ ಎಂದರ್ಥ. ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿದ ಫಲಿತಗಳು

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ರಾಜ ಬೀಳುವ ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳು E= {(H, H), (H, T) (T, H)}

E ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(E) = 3$

$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$ [ $\because$ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4]

ಅಂದರೆ ಹರ್ಷಿತ್ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ರಾಜ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $= \frac{3}{4}$

**ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ (Check This) :**

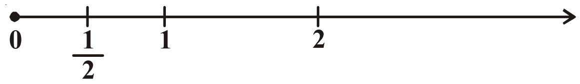
ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಫಲಿತಗಳಸಂಖ್ಯೆ ಪರಿಮಿತ.

ಕೆಲವು ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಗಳು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಒಂದು ವೃತ್ತ ಅಥವಾ ಆಯತದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಾಗುವ ಅವಕಾಶಗಳಿವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲಾರೆವು. ಅವು ಅಪರಿಮಿತಿಗಳು (ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅಪರಿಮಿತ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ವೃತ್ತ ಇಲ್ಲವೇ ಆಯತದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಅಪರಿಮಿತ). ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನೆ, ಸಮೀಕರಣ ರೂಪಗಳು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಪಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಂತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದೋ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಮೂಲಕ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-10.** ( ವಾರ್ಷಿಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗಲ್ಲ) ಮ್ಯೂಜಿಕಲ್ ಚೇರ್ಸ್ ಆಟದಲ್ಲಿ, ಆಟ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ಎರಡು ನಿಮಿಷದೊಳಗೆ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಹಾಡು ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಆಟಗಾರರು ನಿಲ್ಲಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆಟ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ 30 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳೊಳಗೆ ಹಾಡು ನಿಲ್ಲುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಹಾಡು ನಿಲ್ಲುವ ಸಮಯದ ಫಲಿತಗಳು 0 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,




$\frac{1}{2}$ ನಿಮಿಷದೊಳಗೆ ಹಾಡು ನಿಲ್ಲುವುದು ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು E ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದಲ್ಲಿ

E ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳೆಂದರೆ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0 , $\frac{1}{2}$ ನಡುವೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳು.

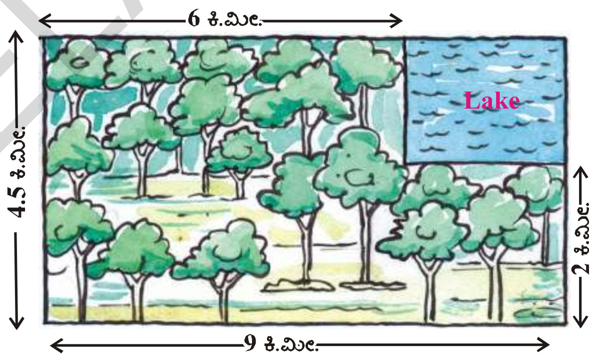
0 ಹಾಗೂ 2 ರ ನಡುವಿನ ದೂರವು 2 ಆದರೆ, 0, $\frac{1}{2}$ ದ ನಡುವಿನ ದೂರ $\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ದೂರ (ಕಾಲ) 2 ಎಂದು, E ಗೆ ಅನುಕೂಲ ದೂರ (ಕಾಲ) $\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

$$\therefore\ P(E) = \frac{\text{E ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ದೂರ}}{\text{ಒಟ್ಟು ದೂರ}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗೆ ಸಹ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೋ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-11.** ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಆಯತಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೆಲಿಕ್ಯಾಪ್ಟರ್ ಕುಸಿದು ಬಿದ್ದಿದೆಯೆಂದು ಸುದ್ದಿ ಬಂದಿದೆ. ಅದು ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದು ಹೋಗಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?




**ಪರಿಹಾರ :** ಸಂಪೂರ್ಣ ಆಯತಾಕಾರ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಹೆಲಿಕ್ಯಾಪ್ಟರ್ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರವಾದರೂ ಕುಸಿದು ಬಿದ್ದಿರಬಹುದು.

ಘಟನೆ ನಡೆದಿರುವ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ n(s) = (4.5 × 9) ಕಿ.ಮೀ.$^2$ = 40.5 ಕಿ.ಮೀ.$^2$

ಘಟನೆ E ಸಂಭವಿಸಲು ಅನುಕೂಲಕರ ಪ್ರದೇಶ = (2 × 3) ಕಿ.ಮೀ.$^2$ = 6 ಕಿ.ಮೀ.$^2$

P (ಹೆಲಿಕ್ಯಾಪ್ಟರ್ ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಕುಸಿದಿರುವುದು) = $\frac{6}{40.5} = \frac{4}{27}$

**ಉದಾಹರಣೆ-12.** ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 100 ಷರ್ಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 88 ಷರ್ಟ್‌ಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. 8 ಷರ್ಟ್‌ಗಳು ಕೆಲವು ನ್ಯೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು 4 ಷರ್ಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚು ನ್ಯೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಜಾನಿ ಎಂಬುವ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಉತ್ತಮ ಷರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಸುಜಾತ ಎಂಬ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಹೆಚ್ಚು ನ್ಯೂನ್ಯತೆ ಇರುವ ಷರ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ನಿರಾಕರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಷರ್ಟ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಯಾರು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(i) ಜಾನಿ (ii) ಸುಜಾತ

**ಪರಿಹಾರ :** ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿನ 100 ಷರ್ಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 1 ಷರ್ಟ್‌ನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಫಲಿತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಸಂಭವಗಳು.

(i) ಜಾನಿ ಷರ್ಟ್‌ಕೊಳ್ಳಲು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳು = 88 (ಏಕೆ ?)

$$\therefore \text{ P (ಜಾನಿ ಷರ್ಟ್‌ನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು)} = \frac{88}{100} = 0.88$$

(ii) ಸುಜಾತ ಷರ್ಟ್ ಕೊಳ್ಳಲು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳು = 88 + 8 = 96 (ಏಕೆ ?)

$$\therefore \text{ P (ಸುಜಾತ ಷರ್ಟ್‌ನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು)} = \frac{96}{100} = 0.96$$

**ಉದಾಹರಣೆ-13.** ಎರಡು ದಾಳಗಳು, ಒಂದು ಕೆಂಪು ಹಾಗೂ ಮತ್ತೊಂದು ಹಳದಿ, ಒಂದೇ ಬಾರಿಗೆ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (i) 8 (ii) 13 ಮತ್ತು (iii) 12 ಇಲ್ಲವೇ 12ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?

**ಪರಿಹಾರ :** ಕೆಂಪು ದಾಳದ ಮೇಲೆ '1' ಇದ್ದಾಗ, ಹಳದಿ ದಾಳದ ಮೇಲೆ 1, 2, 3, 4, 5 ಇಲ್ಲವೇ 6 ಯಾವುದಾರೂ ಇರಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಂಪು ದಾಳದ ಮೇಲೆ '2', '3', '4', '5' ಇಲ್ಲವೇ '6' ಇದ್ದಾಗಲೂ ಸಹ ವಿವಿಧ ಫಲಿತಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಗಳು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಾಗಿ ನೋಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲಿನದು ಕೆಂಪು ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡನೇಯದು ಹಳದಿ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

ಆದ್ದರಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗೆ (1, 4), (4, 1) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲ.

ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n(S) = 6 × 6 = 36.

(i) ಘಟನೆ E (ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 8)ರ

ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳು = { (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) } (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ)

E ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n(E) = 5.

$$\therefore \text{ P(E)} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(ii) ಘಟನೆ F (ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ13) ಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳು ಶೂನ್ಯವು.

$$\therefore \text{ P(F)} = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) ಘಟನೆ G (12 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ)ಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಅನುಕೂಲವಾದುವೇ.

$$\therefore \text{ P(G)} = \frac{36}{36} = 1$$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 13.2

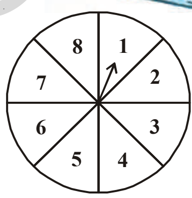
1. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು, 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಚೀಲದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು (i) ಕೆಂಪಾಗಿರಲು (ii) ಕೆಂಪಾಗದಿರಲು ಸಂಭಾವನೀಯತೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು, 8 ಬಿಳಿ, 4 ಎಲೆಹಸಿರು ಗೋಲಿಗಳಿವೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ (i) ಕೆಂಪು (ii) ಬಿಳುಪು (iii) ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ್ದು ಆಗದಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಮಕ್ಕಳ ಹಣದ ಹುಂಡಿಯಲ್ಲಿ ನೂರು 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯಗಳು, ₹1 ನಾಣ್ಯಗಳು 50, ₹ 2 ನಾಣ್ಯಗಳು 20 ಹಾಗೂ ಹತ್ತು ₹ 5 ನಾಣ್ಯಗಳಿವೆ. ಹುಂಡಿಯನ್ನು ತಲೆಕೆಳಗೆ ಮಾಡಿದಾಗೆಲ್ಲಾ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದು (i) 50 ಪೈಸೆ ನಾಣ್ಯವಾಗಲು (ii) ₹5 ರ ನಾಣ್ಯವಾಗದಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಗೋಪಿಯು ಅಕ್ವೇರಿಯಂನಿಂದ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಅಕ್ವೇರಿಯಂನಲ್ಲಿ 5 ಗಂಡು, 8 ಹೆಣ್ಣು ಮೀನುಗಳಿದ್ದಾಗ, ವ್ಯಾಪಾರಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೀನನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಟ್ಟರೇ, ಆ ಮೀನು ಗಂಡು ಮೀನಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

5. ಒಂದು ಆಟದಲ್ಲಿ ವೇಗವಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಬಾಣದ ಚಿಹ್ನೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ಇಲ್ಲವೇ 8 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾ ನಿಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಸಮ ಸಂಭವಗಳಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ. ಬಾಣದ ಗುರ್ತು ಸೂಚಿಸುವುದು.




(i) 8 ?  (ii) ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ

(iii) 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡಸಂಖ್ಯೆ  (iv) 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ

6. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಲ್ಪಟ್ಟ 52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ, ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕಾರ್ಡ್ ಆಗಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಕೆಂಪು ರಾಜ  (ii) ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್  (iii) ಕೆಂಪು, ಮುಖ ಕಾರ್ಡ್

(iv) ಹೃದಯದ ಚಿಹ್ನೆಯಿರುವ ಜಾಕೀ  (v) ಸ್ಪೇಡ್  (vi) ಡೈಮೆಂಡ್ ಗುರ್ತು ಇರುವ ರಾಣಿ

7. ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿನ ಡೈಮೆಂಡ್ ಚಿಹ್ನೆಯಿರುವ 5 ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು, 10 ರಾಜ, ರಾಣಿ, ಜಾಕಿ ಮತ್ತು ಏಸ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆರೆಸಿ, ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡಲ್ಲಿ

(i) ಆ ಕಾರ್ಡ್ ರಾಣಿ ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

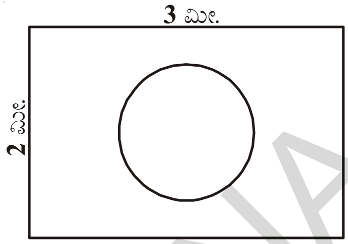
(ii) ರಾಣಿ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ 2ನೇ ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಲ್ಲಿ ಅದು

(a) ಏಸ್ ಆಗಲು (b) ರಾಣಿ ಆಗಲು ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?

8. ನ್ಯೂನ್ಯತೆಗಳಿರುವ 12 ಲೇಖನಿಗಳು ಆಕಸ್ಮಾತ್ತಾಗಿ 132 ಉತ್ತಮ ಲೇಖನಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಬೆರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ನೋಡಿದ ತಕ್ಷಣವೇ ಲೇಖನಿಯಲ್ಲಿನ ನ್ಯೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲಾರೆವು, ಹಾಗಾದರೆ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಅದು ಉತ್ತಮ ಲೇಖನಿ ಆಗಲು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

9. 20 ವಿದ್ಯುತ್ ಬಲ್ಬುಗಳಿರುವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 4 ಬಲ್ಬುಗಳು ಕನಿಷ್ಟ ಮಟ್ಟದ್ದು, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದ ಬಲ್ಬು ಕನಿಷ್ಟ ಮಟ್ಟದ್ದಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ವೇಳೆ ಅದು ಉತ್ತಮ ಬಲ್ಬಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಡದೇ ಎರಡನೇ ಬಲ್ಬನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದೂ ಸಹ ಉತ್ತಮ ಬಲ್ಬಾಗಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

10. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 90 ರವರೆಗೆ ಬರೆದಿರುವ 90 ಹಲಿಗೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಹಲಿಗೆಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?
(i) ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ (iii) 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ.




11. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆಯತಾಕಾರ ಹಲಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 1 ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಈ ಹಲಿಗೆಯ ಮೇಲೆ ಜಾರಿಬಿಟ್ಟರೆ ಅದು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

12. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಹತ್ತಿರ144 ಪೆನ್ನುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 20 ಲೇಖನಿಗಳು ದೋಷಪೂರಿತ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಲೇಖನಿಗಳು ಉತ್ತಮವಾಗಿವೆ. ಸುಧ ಪೆನ್ನನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಬಂದರೆ, ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಅದು (i) ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವ (ii) ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

13. ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ (i) ಮೊತ್ತಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ:

| 2 ದಾಳಗಳ ಮೇಲಿನ ಮೊತ್ತ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಸಂಭವನೀಯತೆ | $\frac{1}{36}$ | | | | | | $\frac{5}{36}$ | | | | $\frac{1}{36}$ |

(ii) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಈ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಎನ್ನುವ 11 ಫಲಿತಗಳು ಇರುವುದಿಂದ ಒಂದೊಂದು ಫಲಿತದ ಸಂಭನೀಯತೆ $\frac{1}{11}$ ಎಂದು ಹೇಳಿದನು. ಇವನ ಉತ್ತರದಿಂದ ನೀವು ಸಂತೃಪ್ತರಾಗುವಿರೇ? ವಿವರಿಸಿರಿ.

14. ಒಂದು ರೂಪಾಯಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಬೀಳುವ ರಾಜ, ರಾಣಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ, ಅವು 3 ರಾಜ ಅಥವಾ ರಾಣಿ ಆದರೆ ಹನೀಫ್ ಗೆಲ್ಲುತ್ತಾನೆ. ಹನೀಫ್ ಸೋಲಲು ಇರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಉರುಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಎರಡು ಸಲವೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ (i) 5 ದಾಳದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸಲು
(ii) 5 ದಾಳದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸದಿರಲು ಇರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?

## ಐಚ್ಛಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ :

**[ಇದು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಕೊಡಲು ಅಲ್ಲ]**

1. ಇಬ್ಬರು ಬಳಕೆದಾರರು ಶ್ಯಾಮ್, ಏಕ್ತಾರುಗಳು ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಾರ (ಮಂಗಳವಾರದಿಂದ ಶನಿವಾರದವರೆಗೆ) ಪರಸ್ಪರ ಭೇಟಿಯಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಯಾವ ದಿನವಾದರೂ ಭೇಟಿಯಾಗಿರಬಹುದು, ಆದರೂ ಅವರಿಬ್ಬರೂ (i) ಒಂದೇ ದಿನ (ii) ಹಿಂದುಮುಂದಿನ ದಿನಗಳು (iii) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಗಡಿಯನ್ನು ದರ್ಶಿಸಿರಲು ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪುಚೆಂಡುಗಳು, ಕೆಲವು ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ,ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ ಎಷ್ಟು ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ?

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ :** "ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು – ಪ್ರಾಯೋಗಾತ್ಮಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸುವುದು".
ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಮೂದಿಸುವಂತೆ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು.
★ i) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು 100 ಸಾರಿ ಹಾಕುವುದು. (a) ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು (b) ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು (c) ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮುಂತಾದವು.
ii) ನಾಣ್ಯವನ್ನು 100 ಸಾರಿ/200 ಸಾರಿ ಹಾರಿಸಿದಾಗ (a) ಹೆಡ್ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ (b) ಟೇಲ್ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ.
iii) ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ.
iv) ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡುಗಳು/ಕಾರ್ಡುಗಳು/ಇಸ್ಪೀಟ ಎಲೆಗಳು.

3. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 12 ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ $x$ ಚೆಂಡುಗಳು ಕರಿಬಣ್ಣದ್ದು, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಕಪ್ಪಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಇನ್ನೂ 6 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಆಗ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಮೊದಲಿಗಿಂತಲೂ 2ರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $x$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
4. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 24 ಗೋಲಿಗಳಿವೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಎಲೆಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ್ದು, ಕೆಲವು ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಗೋಲಿಗಳು. ಪಾತ್ರೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಎಲೆ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಗೋಲಿ ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{2}{3}$ ಆದರೆ ನೀಲಿ ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟು?

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

1. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆ, ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.
2. ಘಟನೆ E ಯ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು P(E) ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$P(E) = \frac{\text{E ಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳು ಸಮಸಂಭವಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

3. ಖಚಿತ ಅಥವಾ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ 1.
4. ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ 0.
5. ಘಟನೆ E ಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ P(E) ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು $0 \leq P(E) \leq 1$
6. ಒಂದೇ ಒಂದು ಅನುಕೂಲಕರ ಫಲಿತಗಳ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗುತ್ತದೆ.
7. E ಒಂದು ಘಟನೆಯಾದಲ್ಲಿ E ಅಲ್ಲದ್ದು ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು $\overline{E}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಪೂರಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. $P(E) + P(\overline{E}) = 1$.
8. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

**ಸಮಸಂಭವ ಘಟನೆ** : ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸಲು ಸಮಾನ ಅವಕಾಶಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಪರಸ್ಪರ ವರ್ಜ್ಯ ಘಟನೆ** : ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳು, ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯ, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ನಿರೋಧಿಸಿದರೆ ಆ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಜ ಘಟನೆಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಪೂರಕ ಘಟನೆ** : ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಅನುಕೂಲ ಫಲಿತಗಳಲ್ಲದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಆವರಣದಲ್ಲಿನ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಘಟನೆಯನ್ನು ಮೊದಲ ಆ ಘಟನೆಯ ಪೂರಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಪೂರ್ಣ ಘಟನೆ** : ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಘಟನೆಗಳ ಸಮ್ಮೇಳನವು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಆದರೆ, ಅದನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಘಟನೆ ಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಖಚಿತ ಘಟನೆ** : ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಖಚಿತವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಆದಲ್ಲಿ ಆ ಘಟನೆಯನ್ನು ಖಚಿತ ಇಲ್ಲವೇ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

**ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ** : ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

# ಅಧ್ಯಾಯ 14

# ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (Statistics)



## 14.1 ಪರಿಚಯ

ಗಣೇಶ್ ತನ್ನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ 26 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಂಗ್ರಹಣಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ -I ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ರಿಜಿಸ್ಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ್ದಾನೆ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ಅರ್ಜುನ್ | 76 | ನಾರಾಯಣ | 12 |
| ಕಾಮಿನಿ | 82 | ಸುರೇಶ್ | 24 |
| ಷಫೀಕ್ | 64 | ದುರ್ಗಾ | 39 |
| ಕೇಶವ್ | 53 | ಶಿವ | 41 |
| ಲತ | 90 | ರಹೀಮ್ | 69 |
| ರಾಜೇಂದರ್ | 27 | ರಾಧ | 73 |
| ರಾಮು | 34 | ಕಾರ್ತಿಕ್ | 94 |
| ಸುಧ | 74 | ಜೋಸಫ್ | 89 |
| ಕೃಷ್ಣ | 76 | ಇಕ್ರಮ್ | 64 |
| ಸೋಮು | 65 | ಲಕ್ಷ್ಮಿ | 46 |
| ಗೌರಿ | 47 | ಸೀತಾ | 19 |
| ಉಪೇಂದ್ರ | 54 | ರೆಹನಾ | 53 |
| ರಾಮಯ್ಯ | 36 | ಅನಿತ | 69 |

ಮೇಲೆ ಕೊಡಲಾದ ದತ್ತಾಂಶವು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶವೇ ? ಅಲ್ಲವೇ ? ಏಕೆ ?

ಅವರ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕ ಗಣೇಶನನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ - I, ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಪ್ರತಿಭೆಯ ಮೇಲೆ ನಿವೇದಿಕೆ ಕೊಡು ಎಂದು ಕೇಳಿದನು. ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತೋರಿದ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಗಣೇಶ್ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು.

| ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 0 - 33 | 4 |
| 34 - 50 | 6 |
| 51 - 75 | 10 |
| 76 - 100 | 6 |

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶ ವರ್ಗೀಕೃತವೇ ? ಅವರ್ಗೀಕೃತವೇ ?

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತನ್ನ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗೆ ತೋರಿಸಿದಾಗ, ಶಿಕ್ಷಕನು ಗಣೇಶನನ್ನು ಮೆಚ್ಚಿಕೊಂಡನು. ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದನು. ಹೆಚ್ಚು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು '51-75' ನಡುವೆ ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ಹಾಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ. ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರು ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಗಣೇಶ್ ಕಡಿಮೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಚೆನ್ನಾಗಿರುತಿತ್ತೆಂದು ನೀವು ಭಾವಿಸುತ್ತಿರುವಿರೇ ? ಏಕೆ ?

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ವರ್ಗೀಕೃತ, ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಮತ್ತು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ 'ಸರಾಸರಿ' ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ, ಈಗ ಇದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಗುರ್ತುಮಾಡಿಕೊಂಡು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

## 14.2 ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ (MEAN OF UNGROUPED DATA) :

ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ 'ಸರಾಸರಿ' ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ ! $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಆವೃತ್ತಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $f_1, f_2, \ldots, f_n$. ಅಂದರೆ $x_1$ ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ $f_1$ ಬಾರಿ, $x_2$ ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ $f_2$ ಬಾರಿ ಪುನರಾವೃತ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ $x_3, \ldots, x_n$ ಗಳು ಸಹ.

ಈಗ, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$,

ಮತ್ತು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ $(\bar{x})$

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

ಮೇಲಿನ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಗ್ರೀಕು ಅಕ್ಷರ (ಸಿಗ್ಮಾ) $\sum$ ( $\sum$ ಎಂದರೆ ಮೊತ್ತ)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

**ಉದಾಹರಣೆ -1.** ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 10ನೇ ತರಗತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು $(x_i)$ | 10 | 20 | 36 | 40 | 50 | 56 | 60 | 70 | 72 | 80 | 88 | 92 | 95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(f_i)$ | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 |

**ಪರಿಹಾರ :** ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪುನಃ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಮಾಡಿ ಬರೆದಾಗ

| ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ($x_i$) | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ($fi$) | $f_i x_i$ |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 10 |
| 20 | 1 | 20 |
| 36 | 3 | 108 |
| 40 | 4 | 160 |
| 50 | 3 | 150 |
| 56 | 2 | 112 |
| 60 | 4 | 240 |
| 70 | 4 | 280 |
| 72 | 1 | 72 |
| 80 | 1 | 80 |
| 88 | 2 | 176 |
| 92 | 3 | 276 |
| 95 | 1 | 95 |
| ಒಟ್ಟು | $\sum f_i = 30$ | $\sum f_i x_i = 1779$ |

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

$\therefore$ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ : 59.3.

ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಬಹಳ ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು, ಅಂತಹ (ಅವರ್ಗೀಕೃತ) ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುಕೊಂಡು, ಅದರ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ –1ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾದ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು 'ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ' 15ಯಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸೋಣ. ಇವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ(ವಿಮುಕ್ತ) ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಆದ್ದರಿಂದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಹಂಚುವಾಗ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಿಹದ್ದುಗೆ ಸಮವಾದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ನಂತರದ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬೇಕೆಂದು ಗುರ್ತಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ನಾಲ್ಕು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು '25-40' ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲದೆ, ನಂತರ ವರ್ಗಾಂತರ '40-55'ರಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ನಾವು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

| ವರ್ಗಾಂತರ | 10-25 | 25-40 | 40-55 | 55-70 | 70-85 | 85-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 2 | 3 | 7 | 6 | 6 | 6 |

ಒಟ್ಟು ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ವಹಿಸುವ ಒಂದು ಬೆಲೆ (Point) ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕ. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರ ಆವೃತ್ತಿ (ಅಂದರೆ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು) ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸುತ್ತಲೂ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾದಂತೆ ಭಾವಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯವಾಗಿ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನೇ ವರ್ಗದ ಗುರುತು (Class Marks) ಅಥವಾ 'ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ವರ್ಗದ ಗುರುತು ಎನ್ನುವುದು ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ಎಂದು ಗುರ್ತಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$$\text{ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ} = \frac{\text{ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲ್ಮಿತಿ} + \text{ಆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಮಿತಿ}}{2}$$

10 -25, ಎಂಬ ವರ್ಗಾಂತರದ 'ವರ್ಗದ ಗುರುತು' = $\frac{10+25}{2}$ =17.5. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉಳಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ 'ವರ್ಗದ ಗುರುತು'ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ವರ್ಗದ ಗುರುತುಗಳನ್ನು '$x_i$' ಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ, ಸರಾಸರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಮಾಡೋಣ.

| ವರ್ಗಾಂತರ | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ($f_i$) | ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ($x_i$) | $f_i x_i$ |
|---|---|---|---|
| 10-25 | 2 | 17.5 | 35.0 |
| 25-40 | 3 | 32.5 | 97.5 |
| 40-55 | 7 | 47.5 | 332.5 |
| 55-70 | 6 | 62.5 | 375.0 |
| 70-85 | 6 | 77.5 | 465.0 |
| 85-100 | 6 | 92.5 | 555.0 |
| ಒಟ್ಟು | $\sum f_i=30$ | | $\sum f_i x_i=1860.0$ |

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆ ನಿಲುವು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ $\sum f_i x_i$ . ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಈ ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು **'ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿ' (Direct Method)** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ, ಒಂದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ ಉದಾಹರಣೆ (1)ರಲ್ಲಿ ಖಚ್ಚಿತ ಸರಾಸರಿ 59.3 ಆದರೆ, 62 ಎನ್ನುವುದು ಸರಾಸರಿಯ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಈ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಏಕೆ ಬಂದಿದೆಯೋ? ಆಲೋಚಿಸಿರಿ ?

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

1. ವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಅತ್ಯಂತ ಖಚ್ಚಿತವಾದ ಸರಾಸರಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೀರಿ ? ಏಕೆ ?
2. ದತ್ತಾಂಶ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶ ಯಾವಾಗ ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ?

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $x_i$ , $f_i$ ಬೆಲೆಗಳು ಬಹಳ ದೊಡ್ಡವಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಕಷ್ಟ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭತರ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ **'ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿ'** ಯನ್ನು ಕುರಿತು ಆಲೋಚಿಸೋಣ.

ನಾವು '$f_i$' ಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ ಆದರೆ $x_i$, $f_1$ ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸುಲಭತರ ಮಾಡಲು $x_i$ ಗಳನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು ?

ಉದಾ-1ರಲ್ಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲನೆ ಹಂತದಲ್ಲಿ '$x_i$'ಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು 'ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ' ಯಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು '$a$' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮುನ್ಮುಂದೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಸುಲಭತರ ಮಾಡಲು $x_1, x_2, ..., x_n$ ಗಳ ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ '$a$' ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $a = 47.5$ ಅಥವಾ $a = 62.5$ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈಗ $a = 47.5$ ಎಂದು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ $x_i$' ನಿಂದ '$a$' ನ ದೂರ $(x_i - a)$ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ಇದನ್ನು ವಿಚಲನೆ $d_i$ ಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

i.e., $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$ ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.

ಮೂರನೆ ಹಂತದಲ್ಲಿ $d_i$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಂಬಂಧಿತ ಆವೃತ್ತಿ $(f_i)$ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಮತ್ತು $f_i d_i$ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

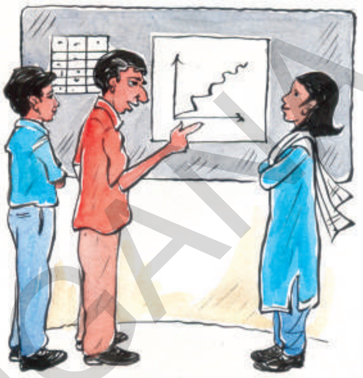
| ವರ್ಗಾಂತರ | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(f_i)$ | ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $(x_i)$ | $d_i = x_i - 47.5$ | $f_i d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 10-25 | 2 | 17.5 | -30 | -60 |
| 25-40 | 3 | 32.5 | -15 | -45 |
| 40-55 | 7 | 47.5 $(a)$ | 0 | 0 |
| 55-70 | 6 | 62.5 | 15 | 90 |
| 70-85 | 6 | 77.5 | 30 | 180 |
| 85-100 | 6 | 92.5 | 45 | 270 |
| ಒಟ್ಟು | $\sum f_i = 30$ | | | $\sum f_i d_i = 435$ |

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಈಗ, $\bar{d}$ ಮತ್ತು $\bar{x}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$d_i$ ಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ನಮಗೆ ಪ್ರತಿ '$x_i$' ನಿಂದ '$a$' ನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿ ($\bar{x}$) ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ '$a$' ನ್ನು $\bar{d}$ ಗೆ ಕೂಡಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಗಣಿತ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವಿಚಲನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$



ಆದುದರಿಂದ, $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $a$, $\sum f_i d_i$ ಮತ್ತು $\sum f_i$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ = 62.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು **'ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ'** (Deviation Method) ಅಥವಾ **'ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿ'** (Assumed Mean Method)ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

**ಚಟುವಟಿಕೆ**

ಉದಾಹರಣೆ- 1ರಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ $x_i$ ನ ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂದರೆ 17.5, 32.5,.... ಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 'ಸರಾಸರಿ'ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿರಿ. ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

1. ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವೇ ?
2. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಸರಾಸರಿಯನ್ನೇ, ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆಗ $\sum f_i d_i$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
3. ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (class mark)ನ್ನು **'ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ'** ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

ಪಕ್ಕದ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ '4' ನೇ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಆ ಬೆಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ 15ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೇ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು 4 ನೇ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 15ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೆಲೆಗಳು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಆಗ ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $f_i$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು ಸುಲಭ (ಇಲ್ಲಿ 15 ಎನ್ನುವುದು ವರ್ಗಾಂತರ ಅಥವಾ 4ನೇ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.)

ಆದ್ದರಿಂದ $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $a$ ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು $h$ ಎನ್ನುವುದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ.

ಮೇಲಿನ ವಿಧವಾಗಿ, $u_i$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. (i.e., $f_i u_i$ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ನಂತರ $\sum f_i u_i$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು.) $h = 15$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು (ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವನ್ನು $h$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ $h$ ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವಾಗಿರಬೇಕಿಲ್ಲ).

ಆದ್ದರಿಂದ $\bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

| ವರ್ಗಾಂತರ | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ($f_i$) | ವರ್ಗಾಂತರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ($x_i$) | $d_i = x_i - a$ | $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ | $f_i u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10-25 | 2 | 17.5 | -30 | -2 | -4 |
| 25-40 | 3 | 32.5 | -15 | -1 | -3 |
| 40-55 | 7 | 47.5 | 0 | 0 | 0 |
| 55-70 | 6 | 62.5 | 15 | 1 | 6 |
| 70-85 | 6 | 77.5 | 30 | 2 | 12 |
| 85-100 | 6 | 92.5 | 45 | 3 | 18 |
| ಒಟ್ಟು | $\sum f_i$=30 | | | | $\sum f_i u_i$ =29 |

ಇಲ್ಲಿ, ಮತ್ತೆ $\bar{u}$ ಮತ್ತು $\bar{x}$ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$ ಮತ್ತು

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು

ಆದ್ದರಿಂದ $$\bar{u} = \frac{\sum f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

ಇಲ್ಲವೇ $$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $$\bar{x} = a + h\left\{\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right\}$$

ಅಥವಾ $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $\sum f_i u_i$ ಮತ್ತು $\sum f_i$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \frac{29}{30}$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಾಧಿಸಿದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ= 62.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿಲಾದ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು **'ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ'** ಅಥವಾ **'ಹಂತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ'** (Step-deviation) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ

**ಗಮನಿಸಿದ್ದು :**

* ಒಂದು ವೇಳೆ $d_i$ ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇದ್ದರೆ, ಹಂತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವುದು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾದ ಪದ್ಧತಿ
* ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳ ಮೂಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆ ಒಂದೇ.
* ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಗಳು ಎನ್ನುವವು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಸುಲಭತರ ಮಾಡಿದ ಪದ್ಧತಿಗಳು ಮಾತ್ರವೇ.
* ಒಂದು ವೇಳೆ $a$ ಮತ್ತು $h$ ಬೆಲೆಗಳು ಮೇಲಿನ ವಿಧವಾಗಿ ಕೊಡದಿದ್ದರೂ, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿ $\bar{x} = a + h\bar{u}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** ಭಾರತದೇಶದಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದ ಗ್ರಾಮೀಣ ಪ್ರದೇಶ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶೇಕಡಾ ಮಹಿಳಾ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಹಿಳಾ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಶೇಕಡಾ ಮಹಿಳಾ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು | 15 - 25 | 25 - 35 | 35 – 45 | 45 - 55 | 55 - 65 | 65 - 75 | 75 – 85 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ರಾಜ್ಯಗಳು ಅಥವಾ ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶ | 6 | 11 | 7 | 4 | 4 | 2 | 1 |

(*NCERT*ಯವರು ನಿರ್ವಹಿಸಿದ ಏಳನೇ ಅಖಿಲ ಭಾರತೀಯ ಪಾಠಶಾಲೆ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸರ್ವೇ ಗಣಾಂಕಗಳ ಪ್ರಕಾರ)

**ಪರಿಹಾರ :** ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $x_i$ ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು, ಅದನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ

ಇಲ್ಲಿ $a = 50, h = 10,$

ಆಗ $d_i = x_i - 50$ ಮತ್ತು $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$

ಈಗ ನಾವು $d_i$ ಮತ್ತು $u_i$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

| ಶೇಕಡಾ ಮಹಿಳಾ ಶಿಕ್ಷಕಿಯರು | ರಾಜ್ಯ/ಕೇಂದ್ರಾಡಳಿತ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | $x_i$ | $d_i = x_i - 50$ | $u_i = f_ix_i$ $\frac{x_i - 50}{10}$ | $f_id_i$ | $f_iu_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $15-25$ | 6 | 20 | -30 | -3 | 120 | -180 | -18 |
| $25-35$ | 11 | 30 | -20 | -2 | 330 | -220 | -22 |
| $35-45$ | 7 | 40 | -10 | -1 | 280 | -70 | -7 |
| $45-55$ | 4 | 50 | 0 | 0 | 200 | 0 | 0 |
| $55-65$ | 4 | 60 | 10 | 1 | 240 | 40 | 4 |
| $65-75$ | 2 | 70 | 20 | 2 | 140 | 40 | 4 |
| $75-85$ | 1 | 80 | 30 | 3 | 80 | 30 | 3 |
| ಒಟ್ಟು | 35 | | | | 1390 | -360 | -36 |

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ, $\sum f_i = 35, \sum f_ix_i = 1390, \sum f_id_i = -360, \sum f_iu_i = -36$.

ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ಊಹಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ $\bar{x} = a + \frac{\sum f_id_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

ಹಂತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ ಮೂಲಕ $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

ಗ್ರಾಮೀಣ ಪ್ರದೇಶ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಮಹಿಳಾ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರ ಸರಾಸರಿ ಶೇಕಡಾ = 39.71.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

1. ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸಲಾದ ಫಲಿತ ಒಂದೆಯೇ ?
2. ಒಂದು ವೇಳೆ $x_i$ ಮತ್ತು $f_i$ ಗಳು ಸಾಕಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಯಾವ ಯಾವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ?
3. ಒಂದು ವೇಳೆ $x_i$ ಮತ್ತು $f_i$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ ಯಾವುದು ಸರಿಯಾದ ಪದ್ಧತಿ ?

ಒಂದು ವೇಳೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಇದ್ದರೂ ಮತ್ತು $x_i$ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ $d_i$ ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು $h$ ಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

**ಉದಾಹರಣೆ-3.** ವನ್‌ಡೇ ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಆಟದಲ್ಲಿ ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಸಾಧಿಸಿದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸರಿಯಾದ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಬೌಲರ್‌ಗಳು ಸಾಧಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಸರಾಸರಿಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಏನು ?

| ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 20 - 60 | 60 - 100 | 100 - 150 | 150 - 250 | 250 - 350 | 350 – 450 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 7 | 5 | 16 | 12 | 2 | 3 |

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ, ಮತ್ತು $x_i$ ಬೆಲೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನೇ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಇಲ್ಲಿ $a = 200$ ಮತ್ತು $h = 20$

| ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | ಬೌಲರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ($f_i$) | $x_i$ | $d_i = x_i - a$ | $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ($h = 20$) | $f_i u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 – 60 | 7 | 40 | -160 | -8 | -56 |
| 60 – 100 | 5 | 80 | -120 | -6 | -30 |
| 100 – 150 | 16 | 125 | -75 | -3.75 | -60 |
| 150 – 250 | 12 | 200 ($a$) | 0 | 0 | 0 |
| 250 – 350 | 2 | 300 | 100 | 5 | 10 |
| 350 – 450 | 3 | 400 | 200 | 10 | 30 |
| ಒಟ್ಟು | 45 | | | | -106 |

ಆದ್ದರಿಂದ $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

45 ಮಂದಿ ಬೌಲರ್‌ಗಳು ವನ್‌ಡೇ ಕ್ರಿಕೇಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳ ಸರಾಸರಿ = 152.89.

**ತರಗತಿ ಕೋಣೆ ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ :**

1. ನಿಮ್ಮ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚಿಗೆ ನಿರ್ವಹಿಸಿದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ, ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉಳಿದ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಂಕಗಳ ವಿವರಗಳಿಗೂ ಸಹ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ವಿಷಯಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ.

2. ನಿಮ್ಮ ಪಟ್ಟಣ/ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ 30 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ನಮೂದಾದ 'ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಗಳು' ವಿವರಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿರಿ. ಈ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಇಂತಹ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಳೆದು, ಅಂತಹ ಸಮಾಚಾರಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿರಿ. ಸೂಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಇಂತಹ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.1

1. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡ 'ಪರ್ಯಾವರಣ ಪರಿರಕ್ಷಣೆ-ಅರಿವು' ಎಂಬ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮದ ಭಾಗವಾಗಿ, 20 ಮನೆಗಳಲ್ಲಿ ಸರ್ವೆ ನಿರ್ವಹಿಸಿ, ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಸಸ್ಯಗಳು ನೆಟ್ಟಿದ್ದಾರೋ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಮೂದು ಮಾಡಿದರು. ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಮನೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಸ್ಯಗಳು ನೆಟ್ಟಿದ್ದಾರೋ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಸಸ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 0 - 2 | 2 - 4 | 4 – 6 | 6 - 8 | 8 - 10 | 10 - 12 | 12 – 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 1 | 2 | 1 | 5 | 6 | 2 | 3 |

2. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ 50 ಮಂದಿ ಕಾರ್ಮಿಕರ ದಿನಗೂಲಿಯ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ದಿನಗೂಲಿ ( ₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | 200 - 250 | 250 - 300 | 300 - 350 | 350 - 400 | 400– 450 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ | 12 | 14 | 8 | 6 | 10 |

ಸೂಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿಕೊಂಡು ಆ ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸರಾಸರಿ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕಂ.ಹಿ.?

3. ಒಂದು ಆವಾಸ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಮಕ್ಕಳ ಪ್ರತಿದಿನದ ಕೈ ಖರ್ಚಿನ ಹಣದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮಕ್ಕಳ ಸರಾಸರಿ ಕೈ ಖರ್ಚು ₹ 18 ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಲೋಪಿಸಿದ ಆವೃತ್ತಿ $(f)$ ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಮಕ್ಕಳ ಪ್ರತಿದಿನದ ಕೈ ಖರ್ಚು ( ₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | 11 - 13 | 13 - 15 | 15 - 17 | 17 - 19 | 19 - 21 | 21 - 23 | 23 - 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 7 | 6 | 9 | 13 | $f$ | 5 | 4 |

4. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ವೈದ್ಯರು 30 ಮಂದಿ ಸ್ತ್ರೀಯರಿಗೆ ವೈದ್ಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ನಿರ್ವಹಿಸಿ, ಅವರುಗಳ ಹೃದಯ ಸ್ಪಂದನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರೂಢೀಕರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸೂಕ್ತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಇಂತಹ ಸ್ತ್ರೀಯರ ಹೃದಯ ಸ್ಪಂದನೆಗಳ ಸರಾಸರಿ (ಒಂದು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ)ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಹೃದಯ ಸ್ಪಂದನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ/ನಿ.ಕ್ಕೆ | 65-68 | 68-71 | 71-74 | 74-77 | 77-80 | 80-83 | 83-86 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ | 2 | 4 | 3 | 8 | 7 | 4 | 2 |

5. ಹಣ್ಣಿನ ಮಾರ್ಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ, ಹಣ್ಣಿನ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿದೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿನ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಹಂಚಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

| ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 10-14 | 15–19 | 20-24 | 25-29 | 30–34 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 15 | 110 | 135 | 115 | 25 |

ಒಂದೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವಿರೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

6. ಒಂದು ಆವಾಸ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ 25 ಕುಟುಂಬಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ದೈನಂದಿನ ಊಟದ ಖರ್ಚುಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ದೈನಂದಿನ ಊಟದ ಖರ್ಚು (₹ಗಳಲ್ಲಿ) | 100-150 | 150-200 | 200-250 | 250-300 | 300-350 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 4 | 5 | 12 | 2 | 2 |

ಸೂಕ್ತ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಒಂದೊಂದು ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಸರಾಸರಿ ಊಟದ ಖರ್ಚನ್ನು ಕಂ.ಹಿ.

7. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿನ 30 ನಿವಾಸ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ, ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ $SO_2$ನ ಗಾಢತೆ (in parts per million, i.e., ppm), ನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರೂಢೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

| $SO_2$ನ ಗಾಢತೆ (in ppm) | 0.00-0.04 | 0.04-0.08 | 0.08-0.12 | 0.12-0.16 | 0.16-0.20 | 0.20-0.24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ಆವೃತ್ತಿ | 4 | 9 | 9 | 2 | 4 | 2 |

ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸರಾಸರಿ $SO_2$ ಗಾಢತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ತರಗತಿ ಉಪಾಧ್ಯಾಯನು ಒಂದು ಟರ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ತರಗತಿಗೆ ಸೇರಿದ 40 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹಾಜರು ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ತೋರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಟರ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸರಾಸರಿ ಹಾಜರು ಎಷ್ಟು?

| ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 35-38 | 38-41 | 41-44 | 44-47 | 47-50 | 50-53 | 53-56 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 1 | 3 | 4 | 4 | 7 | 10 | 11 |

9. 35 ಪಟ್ಟಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಾಕ್ಷರತೆ ರೇಟು (ಶೇಕಡಾಗಳಲ್ಲಿ) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಸರಾಸರಿ ಸಾಕ್ಷರತೆ ರೇಟನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಸಾಕ್ಷರತೆ ರೇಟು (%) | 45–55 | 55-65 | 65-75 | 75-85 | 85-95 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಪಟ್ಟಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 3 | 10 | 11 | 8 | 3 |

## 14.3 ಬಹುಳಕ (MODE) :

ದತ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಮೌಲ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಮೌಲ್ಯವೇ 'ಬಹುಳಕ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ 'ಬಹುಳಕವನ್ನು' ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಮುಂಚೆ ನಾವು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-4.** 10 ಕ್ರಿಕೇಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಬೌಲರ್ ಗಳಿಸಿದ ವಿಕೆಟ್‌ಗಳು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿದೆ. 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ರಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಎಂದರೆ 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ, ಹೆಚ್ಚು ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬೌಲರ್ 2 ವಿಕೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆದಹಾಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ. (ಅಂದರೆ 3 ಬಾರಿ) ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಳಕ 2.

**ಇವು ಮಾಡಿರಿ :**

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. ಬಹುಳಕ ಯಾವಾಗಲೂ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆಯೇ ?
3. ಉದಾಹರಣೆ –4ರಲ್ಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬಹುಳಕ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯಾ? ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.
4. ಒಂದು ವೇಳೆ ಉದಾಹರಣೆ –4ರಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ '8' ಕ್ಕೆ ಬದಲಾದರೆ, ಅದರ ಪ್ರಭಾವ ಅಂತಹ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಳಕದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆಯೇ ? ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ (ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ), ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ'ಬಹುಳಕ'ವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಗರಿಷ್ಟ ಆವೃತ್ತಿ ಇರುವ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಸೂಚಿಸಬಲ್ಲೆವು. ಅಂತಹ ವರ್ಗಾಂತವನ್ನು ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರ (Modal Class)ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಬಹುಳಕ $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

ಇಲ್ಲಿ, $l$ = ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು

$h$ = ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ

$f_1$ = ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ

$f_0$ = ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ

$f_2$ = ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ನಂತರವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-5.** ಒಂದು ಆವಾಸ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಬೃಂದ, 20 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಸರ್ವೆ ಮಾಡಿ, ಕುಟುಂಬ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

| ಕುಟುಂಬದ ಗಾತ್ರ | 1-3 | 3-5 | 5-7 | 7-9 | 9-11 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 7 | 8 | 2 | 2 | 1 |

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ :** ಇಲ್ಲಿ, ಗರಿಷ್ಟ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ 8, ಈ ಆವೃತ್ತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವರ್ಗಾಂತರ 3-5, ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರ 3-5.

ಈಗ ,

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರ = 3-5, ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಿಹದ್ದು $(l) = 3$, ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ $(h) = 2$

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $(f_1) = 8$,

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $(f_0) = 7$,

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ನಂತರ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $(f_2) = 2$.

ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ-

$$\text{ಬಹುಳಕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಬಹುಳಕ = 3.286.

**ಉದಾಹರಣೆ-6.** ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಬಹುಳಕ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ.

| ವರ್ಗಾಂತರ | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ($f_i$) | ವರ್ಗಾಂತರದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ($x_i$) | $f_i x_i$ |
|---|---|---|---|
| 10-25 | 2 | 17.5 | 35.0 |
| 25-40 | 3 | 32.5 | 97.5 |
| 40-55 | 7 | 47.5 | 332.5 |
| 55-70 | 6 | 62.5 | 375.0 |
| 70-85 | 6 | 77.5 | 465.0 |
| 85-100 | 6 | 92.5 | 555.0 |
| ಒಟ್ಟು | $\sum f_i = 30$ | | $\sum f_i x_i = 1860.0$ |

**ಪರಿಹಾರ :** ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು (7ಮಂದಿ) 40-65 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 40 - 55 ಎನ್ನುವುದು ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಹದ್ದು ($l$) = 40,

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ ($h$) = 15,

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ($f_1$) = 7,

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ($f_0$) = 3,

ಬಹುಳಕ ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ನಂತರ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ($f_2$) = 6.

ಈಗ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ :

$$\text{ಬಹುಳಕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

**ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ (Interpretation) :** ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕ 52 ;ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಸರಾಸರಿ 62 (ಉದಾಹರಣೆ-1ರ ಮೂಲಕ) ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಿದೆ. ಅಂದರೆ ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿನ 52 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಇರುವರೆಂದು, ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು 62.

**ಆಲೋಚಿಸಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ, ಬರೆಯಿರಿ :**

1. ಸಂದರ್ಭವನ್ನಿಡಿದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕಗಳು, ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.
   a. ಮೊದಲನೆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವುಯಾವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ?
   b. ಎರಡನೆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವುಯಾವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ ?
2. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವಿರುವ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಕೂಡ 'ಬಹುಳಕ'ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.2

1. ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಷದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳ ವಿವರಗಳ ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) | 5-15 | 15-25 | 25-35 | 35-45 | 45-55 | 55-65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 6 | 11 | 21 | 23 | 14 | 5 |

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 225 ವಿದ್ಯುತ್ ಪರಿಕರಗಳ ಜೀವಿತ ಕಾಲ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಜೀವಿತಕಾಲ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) | 0 - 20 | 20 - 40 | 40 - 60 | 60 - 80 | 80 - 100 | 100 - 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ಆವೃತ್ತಿ | 10 | 35 | 52 | 61 | 38 | 29 |

ಮೇಲಿನ ವಿದ್ಯುತ್ ಪರಿಕರಗಳ ಜೀವಿತಕಾಲ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿನ 200 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚಿನ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅಂತಹ ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚುಗಳ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ತಿಂಗಳ ಸರಾಸರಿ ಖರ್ಚನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) | 1000-1500 | 1500-2000 | 2000-2500 | 2500-3000 | 3000-3500 | 3500-4000 | 4000-4500 | 4500-5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 24 | 40 | 33 | 28 | 30 | 22 | 16 | 7 |

4. ರಾಜ್ಯಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗ ಸೆಕೆಂಡರಿ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶಿಕ್ಷಕ – ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅನುಪಾತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ಕೇಂದ್ರ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರಿ.

| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 | 50-55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ರಾಜ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 3 | 8 | 9 | 10 | 3 | 0 | 0 | 2 |

5. ವನ್‌ಡೇ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯುನ್ನತ ಶ್ರೇಣಿ ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮೆನ್‌ಗಳು ಗಳಿಸಿದ ರನ್ನುಗಳ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ರನ್ನುಗಳು | 3000-4000 | 4000-5000 | 5000-6000 | 6000-7000 | 7000-8000 | 8000-9000 | 9000-10000 | 10000-11000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಬ್ಯಾಟ್ಸ್‌ಮೆನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 4 | 18 | 9 | 7 | 6 | 3 | 1 | 1 |

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ, ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಹೋಗುತ್ತಿರುವ ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ 3ನಿ.ಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾರಿ (1ಪಿರಿಯಡ್), 100 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿ, ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರೂಢೀಕರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

| ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 0 - 10 | 10 - 20 | 20 - 30 | 30 - 40 | 40 - 50 | 50 - 60 | 60 - 70 | 70 - 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಆವೃತ್ತಿ | 7 | 14 | 13 | 12 | 20 | 11 | 15 | 8 |

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

## 14.4 ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕ (MEDIAN OF GROUPED DATA)

ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎನ್ನುವುದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳೆತೆಗಳ (Measure of Central Tendency)ಲ್ಲಿ ಒಂದು , ಇದು ಕೊಡಲಾದ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ 'ಮಧ್ಯಬೆಲೆ'ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಗುರ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಬೇಕು.

ಆಗ, ಒಂದು ವೇಳೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n$ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎನ್ನುವುದು $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ $n$ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮಧ್ಯಾಂಕ ಎನ್ನುವುದು $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸರಾಸರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 50 ಗರಿಷ್ಟ ಅಂಕಗಳಿಗೆ, 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕೋ ಗಮನಿಸೋಣ.

| **ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು** | 20 | 29 | 28 | 33 | 42 | 38 | 43 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ** | 6 | 28 | 24 | 15 | 2 | 4 | 1 | 20 |

ಮೊದಲು, ನಾವು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿ, ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧವಾಗಿ ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕು.

| **ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು** | **ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತಿ)** |
|---|---|
| 20 | 6 |
| 25 | 20 |
| 28 | 24 |
| 29 | 28 |
| 33 | 15 |
| 38 | 4 |
| 42 | 2 |
| 43 | 1 |
| ಒಟ್ಟು | 100 |

ಇಲ್ಲಿ $n = 100$, ಅದು ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ಆಗ ಮಧ್ಯಾಂಕ $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯಮತ್ತು $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸರಾಸರಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, 50ನೇ, 51ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು **'ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು'** ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

| ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|---|---|---|
| 20 ವರೆಗೆ | 6 | 6 |
| 25 ವರೆಗೆ | 6 + 20 = 26 | 26 |
| 28 ವರೆಗೆ | 26 + 24 = 50 | 50 |
| 29 ವರೆಗೆ | 50 + 28 = 78 | 78 |
| 33 ವರೆಗೆ | 78 + 15 = 93 | 93 |
| 38 ವರೆಗೆ | 93 + 4 = 97 | 97 |
| 42 ವರೆಗೆ | 97 + 2 = 99 | 99 |
| 43 ವರೆಗೆ | 99 + 1 = 100 | 100 |

ಈಗ ನಾವು ಈ ಸಮಾಚಾರದ ಆಧಾರವಾಗಿ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಲುವು ಸಾಲನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಬರುವ ಹೊಸ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು :

50ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯ 28 (ಏಕೆ ?)

51ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯ 29

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

**ಸೂಚನೆ :** ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ1ನೇ ಮತ್ತು 3 ನೇ ನಿಲುವು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮಧ್ಯಾಂಕ ಗುರುತು 28.5ಎನ್ನುವುದು 50% ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 28.5 ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ, 50% ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 28.5 ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಬಂದಿರುವ ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಕದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 100 ಅಂಕಗಳಿಗೆ 53 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 0-10 | 5 |
| 10-20 | 3 |
| 20-30 | 4 |
| 30-40 | 3 |
| 40-50 | 3 |
| 50-60 | 4 |
| 60-70 | 7 |
| 70-80 | 9 |
| 80-90 | 7 |
| 90-100 | 8 |

ಈ ಪಟ್ಟಿ ಆಧಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡೋಣ. 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? 5 ಮಂದಿ ಎಂದು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಗೊತ್ತು. ಆದರೆ 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೊ ಹೇಳಿರಿ ?

| ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) |
|---|---|
| 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 5 |
| 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 5 + 3 = 8 |
| 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 8 + 4 = 12 |
| 40ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 12 + 3 = 15 |
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 15 + 3 = 18 |
| 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 18 + 4 = 22 |
| 70 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 22 + 7 = 29 |
| 80 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 29 + 9 = 38 |
| 90 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 38 + 7 = 45 |
| 100 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 45 + 8 = 53 |

20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ; 0-10 ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರು, 10-20 ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರು ಸಹ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರು 5 + 3 ಅಂದರೆ 8ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು 10-20 ಎಂಬ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ 8 ಆಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ನಾವು ಉಳಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಹ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ 30 ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು; 40, ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ..., 100 ಅಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 10, 20, 30, ..., 100, ಗಳು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ವಿಧವಾಗಿ 0ಯಾಗಲಿ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆ (ಇದು ವರ್ಗಾಂತರಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ), 10 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು ಮೇಲಿನ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಮೊದಲನೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ ಕಳೆದಾಗ ಬಂದದ್ದು, 20 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆ (ಇದು ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಯ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಮೊದಲು ಎರಡು ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಆವೃತ್ತಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬಂದದ್ದು), ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬಹುದು.

| ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ) |
|---|---|
| 0 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 53 |
| 10 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 53 - 5 = 48 |
| 20 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 48 - 3 = 45 |
| 30 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 45 - 4 = 41 |
| 40 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 41 - 3 = 38 |
| 50 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 38 - 3 = 35 |
| 60 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 35 - 4 = 31 |
| 70 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 31 - 7 = 24 |
| 80 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 24 - 9 = 15 |
| 90 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು | 15 - 7 = 8 |

0ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಗಳಿಸಿದವರು 53ಮಂದಿ ಇರುವರೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. 0-10 ವರ್ಗಾಂತರದಲ್ಲಿ 5 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 10 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು

ಅಂಕಗಳು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ =53-5 = 48 ಆಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ 20 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 48-3 = 45 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ 30 ಇಲ್ಲವೇ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 45-4 = 41 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಪಕ್ಕದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ 90 ಇಲ್ಲವೇ, ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು 'ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ 0, 10, 20, ..., 90ಗಳು ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು ಆಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಗಳಿಂದ ಮಧ್ಯಬೆಲೆ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಅಂತರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಮೊತ್ತವು ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯವುದು? ಈ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು $\frac{n}{2}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯತ್ತೇವೆ. ನಂತರ ಯಾವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ $\frac{n}{2}$ ನ್ನು ಮೊದಲಬಾರಿ ಮೀರುತ್ತದೆಯೋ ಆ ವರ್ಗಾಂತರವನ್ನು ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

| ಅಂಕಗಳು | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ($f$) | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ($cf$) |
|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 5 |
| 10-20 | 3 | 8 |
| 20-30 | 4 | 12 |
| 30-40 | 3 | 15 |
| 40-50 | 3 | 18 |
| 50-60 | 4 | 22 |
| 60-70 | 7 | 29 |
| 70-80 | 9 | 38 |
| 80-90 | 7 | 45 |
| 90-100 | 8 | 53 |

ಮೇಲಿನ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ, $n = 53$. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{n}{2} = 26.5$.

26.5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರ 60-70. ಇದನ್ನು ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ 29 ( $\frac{n}{2} = 26.5$ಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ದೊಡ್ಡದು / ಹತ್ತಿರವಾದದ್ದು)

ಆದ್ದರಿಂದ 60-70 ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರ

ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಮಧ್ಯಾಂಕ $$M = l + \left( \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

ಇದರಲ್ಲಿ $l$ = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು

$n$ = ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

$cf$ = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಮೊತ್ತ

$f$ = ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ

$h$ = ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $cf = 22$, $f = 7$, $h = 10$

ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

ಮಧ್ಯಾಂಕ $$= 60 + \left[ \frac{26.5 - 22}{6} \right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಅರ್ಧ ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 66.4ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳು ಉಳಿದ ಅರ್ಧ ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 66.4 ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳು ಬಂದಿರುತ್ತವೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-7.** ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 10ನೇ ತರಗತಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರ ಕುರಿತು ನಡೆಸಿದ ಸರ್ವೆ ಫಲಿತಗಳನ್ನು ಪಕ್ಕದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಎತ್ತರ (ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ) | ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 4 |
| 145ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 11 |
| 150 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 29 |
| 155 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 40 |
| 160ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 46 |
| 165ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 51 |

**ಪರಿಹಾರ :** ಮಧ್ಯಾಂಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಕೊಟ್ಟ ವಿತರಣೆಯು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ 140, 145, 150, . . .,165 ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು 140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165 ಆಗುತ್ತದೆ.

| ವರ್ಗಾಂತರ | ಆವೃತ್ತಿ | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|---|---|---|
| 140 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 4 | 4 |
| 140-145 | 7 | 11 |
| 145-150 | 18 | 29 |
| 150-155 | 11 | 40 |
| 155-160 | 6 | 46 |
| 160-165 | 5 | 51 |

ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ 140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವಿರುವ ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಎಂದರೆ 140ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ 4. 145 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರವಿರುವವರು 11ಮಂದಿ ಅಂದರೆ 140 - 145 ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ $11 - 4 = 7$. ಇದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಉಳಿದ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬಹುದು.

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n = 51$, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ 25.5ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 145 - 150 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ 145 - 150 ಮಧ್ಯಾಂಕ ಇರುವ ವರ್ಗಾಂತರ

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು $(l) = 145$,

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಮೊತ್ತ $(cf)$ 145 - 150 = 11,

ಮಧ್ಯಾಂಕವಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತಿ $(f)$ 145 - 150 = 18,

ವರ್ಗಾಂತರದ ಗಾತ್ರ $(h) = 5$.

ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

$\therefore$ ಬಾಲಕಿಯರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ 149.03 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂದರೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 50% ಮಂದಿ ಬಾಲಕಿಯರು 149.03ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುತ್ತಾರೆ. ಉಳಿದ 50% ಮಂದಿ 149.03ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎತ್ತರ ಹೊಂದಿರುತ್ತಾರೆ.

**ಉದಾಹರಣೆ-8.** ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕ 525 ಮತ್ತು ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಆದರೆ $x$, $y$, ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ CI ಎಂದರೆ ವರ್ಗಾಂತರ, Fr ಎಂದರೆ ಆವೃತ್ತಿ)

| CI | 0-100 | 100-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 | 700-800 | 800-900 | 900-1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fr | 2 | 5 | $x$ | 12 | 17 | 20 | $y$ | 9 | 7 | 4 |

**ಪರಿಹಾರ :**

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n = 100$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore$ $76 + x + y = 100$, i.e., $x + y = 24$ ..................(1)

ಮಧ್ಯಾಂಕ 525 ಎಂಬ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 500 – 600 ವರ್ಗಾಂತರಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$\text{ಮಧ್ಯಾಂಕ} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

i.e., $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

i.e., $25 = 70 - 5x$

i.e., $5x = 70 - 25 = 45$

So, $x = 9$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ $9 + y = 24$

i.e., $y = 15$

| ವರ್ಗಾಂತರ | ಆವೃತ್ತಿ | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|---|---|---|
| 0-100 | 2 | 2 |
| 100-200 | 5 | 7 |
| 200-300 | $x$ | $7+x$ |
| 300-400 | 12 | $19+x$ |
| 400-500 | 17 | $36+x$ |
| 500-600 | 20 | $56+x$ |
| 600-700 | $y$ | $56+x+y$ |
| 700-800 | 9 | $65+x+y$ |
| 800-900 | 7 | $72+x+y$ |
| 900-1000 | 4 | $76+x+y$ |

**ಸೂಚನೆ :** ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಗಾತ್ರವಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೂ ಸಹ ಇದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

## 14.5 ವಿವಿಧ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು-ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು (WHICH VALUE OF CENTRAL TENDENCY)

ಸರಾಸರಿ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (ಅತ್ಯಲ್ಪ, ಅತ್ಯಧಿಕ ಬೆಲೆಗಳು ಸಹ) ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ವಿಶ್ವಸನೀಯವಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಹೋಲಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಯಾವ ಪಾಠಶಾಲೆ ಸಮರ್ಥವಂತವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಕೆಲವು ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂತ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಸರಾಸರಿಯ ಮೇಲೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ಬೀರುತ್ತವೆ. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಆವೃತ್ತಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮವಾಗಿರುವ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ, ಆ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಬೆಲೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೂ ಒಂದು ವರ್ಗಾಂತರದ ಆವೃತ್ತಿ 2, ಉಳಿದ ಆವೃತ್ತಿಗಳು 20, 25, 20, 21, 18, ಆದಾಗ ಸರಾಸರಿ ಸೂಕ್ತವಾದ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಬೆಲೆ ಅಲ್ಲ.

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಬಿಡಿ ಬಿಡಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಅಂತಿಮ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆವಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ, ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಾಗ ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕಾರ್ಮಿಕರ ವೇತನಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾತಿನಿಧ್ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಾಗ (ಉಳಿದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಅತ್ಯಲ್ಪ, ಅತ್ಯಧಿಕ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿದ್ದಾಗ) ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ, ಬಹು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಯಾಗಿ

ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ವೀಕ್ಷಿಸುವ ಟೆಲಿವಿಜನ್ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಹೆಚ್ಚು ಮಾರಾಟವಿರುವ ವಸ್ತುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಹೆಚ್ಚು ಮಂದಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಾಹನದ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬಹುಳಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.3

1. ಒಂದು ಆವಾಸ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ 68 ಮಂದಿ ಗ್ರಾಹಕರ ತಿಂಗಳ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ, ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ.

| ತಿಂಗಳ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್) | 65-85 | 85-105 | 105-125 | 125-145 | 145-165 | 165-185 | 185-205 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ | 4 | 5 | 13 | 20 | 14 | 8 | 4 |

2. ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾದ 60 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕ 28.5 ಆದರೆ $x$, $y$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ವರ್ಗಾಂತರ | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ಆವೃತ್ತಿ | 5 | x | 20 | 15 | y | 5 |

3. ಒಂದು ಜೀವನ ಭೀಮಾ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಉದ್ಯೋಗಿ, ಪಾಲಸೀದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ್ಳಿನಿಡಿದು ತಯಾರು ಮಾಡಿದ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪಾಲಸೀದಾರರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. [18 ವರ್ಷಗಳಿಂದ 60 ವರ್ಷಗಳ ವಯಸ್ಸು ಇರುವವರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಪಾಲಸಿಗಳು ಕೊಡುತ್ತಾರೆ.]

| ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) | 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 25ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 30ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 35ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 40ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 45ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 50ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 55ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 60ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಪಾಲಸೀದಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ | 2 | 6 | 24 | 45 | 78 | 89 | 92 | 98 | 100 |

4. ಒಂದು ಮರದ 40 ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮೀಪದ ಮಿ.ಮೀ.ಗೆ ಅಳೆದು ತಯಾರು ಮಾಡಿದೆ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ಎಲೆ ಉದ್ದ (ಮೀ.ಮೀ.) | 118-126 | 127-135 | 136-144 | 145-153 | 154-162 | 163-171 | 172-180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 3 | 5 | 9 | 12 | 5 | 4 | 2 |

**ಸೂಚನೆ :** ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ವಿಮುಕ್ತ ವರ್ಗಾಂತರಗಳಾಗಿ ಅಥವಾ ವರ್ಗಾಂತರದ ಸರಹದ್ದುಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು.

5. ಒಂದು ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿ 400 ನಿಯಾನ್ ಬಲ್ಬುಗಳ ಜೀವಿತಕಾಲ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಜೀವಿತ ಕಾಲ (ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ) | 1500-2000 | 2000-2500 | 2500-3000 | 3000-3500 | 3500-4000 | 4000-4500 | 4500-5000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 14 | 56 | 60 | 86 | 74 | 62 | 48 |

ಬಲ್ಬುಗಳ ಜೀವಿತಕಾಲಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಟೆಲಿಫೋನ್ ಡೈರಕ್ಟರೀಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ 100 ಮನೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಿಡಿದು ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

| ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 1-4 | 4-7 | 7-10 | 10-13 | 13-16 | 16-19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ಮನೆ ಹೆಸರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 6 | 30 | 40 | 16 | 4 | 4 |

ಮನೆ ಹೆಸರುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ, ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 30 ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವರ ತೂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

| ತೂಕ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.ಗಳಲ್ಲಿ) | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 | 60-65 | 65-70 | 70-75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಂಖ್ಯೆ | 2 | 3 | 8 | 6 | 6 | 3 | 2 |

## 14.6 ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು

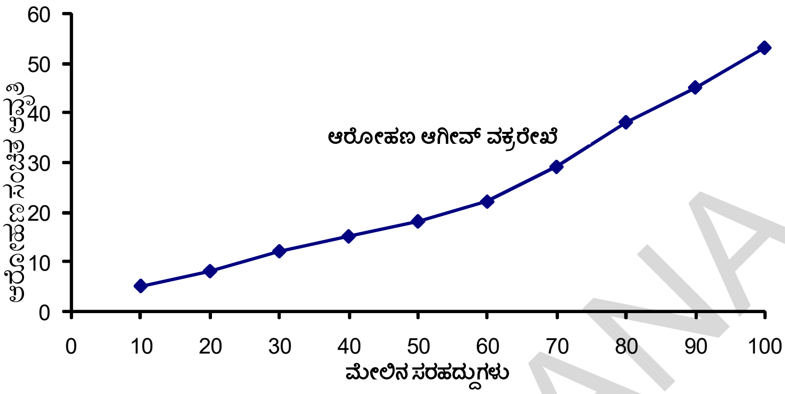
## (Graphical Representation of Cumulative Frequency Distribution)

ಪದಗಳಿಗಿಂತ ಚಿತ್ರ ಅಥವಾ ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅದು ಕಣ್ಣನ್ನು ಸೆಳೆಯುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಗಮನವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ನಕ್ಷಾ ನಿರೂಪಣೆಯು ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಮಗ್ರವಾಗಿ, ನೈಜತೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದದಲ್ಲದೆ, ಸಂಕೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಕಠಿಣ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

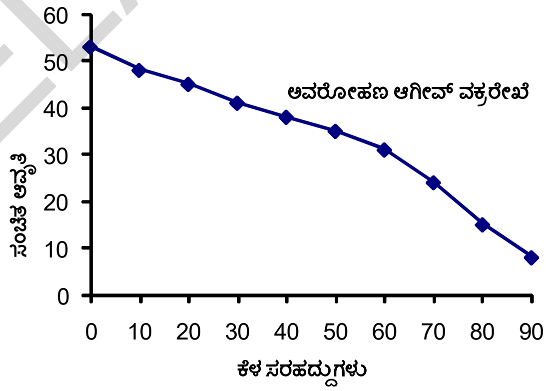
ಸ್ಥಂಭಾಲೇಖ, ಆಯತ ಚಿತ್ರಗಳು, ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಕುರಿತು ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆಯ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಈ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೋಸ್ಕರ ಉದಾಹರಣೆ 6ರಲ್ಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದ ಗ್ಕೋಸ್ಕರ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು (ವಿಮುಕ್ತ ವಿಧಾನ / Exclusive Intervals) ಆಗಿರಬೇಕು. (ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು ವರ್ಗಾತರ ಸರಹದ್ದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ) ಮಿತಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಲ್ಲ.

ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಅನುಕ್ರಮ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಮೇಲೆ ಸರಹದ್ದುಗಳು, 10, 20, 30, ..., 100 ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಸೂಕ್ತವಾದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದು, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು (10, 5), (20, 8), (30,, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) ಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ನಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆ ಅಥವಾ ಆಗೀವ್ **('ogive')** ವಕ್ರರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'ಆಗೀ' ಎಂಬ ಫ್ರೆಂಚ್ ಪದದಿಂದ ಆಗೀವ್ ಎಂಬ ಪದ ಉದ್ಭವವಾಗಿದೆ. ಆಗೀ ಅಂದರೆ ಅಂತರ್ ವಕ್ರವಾಗಿ ಮೊದಲಾಗಿ ಬಹಿರ್ ವಕ್ರವಾಗಿ ಅಂತ್ಯವಾಗುವ ಆಕಾರ, ಸುಮಾರು ಆಂಗ್ಲ ಅಕ್ಷರ **S**-ವಂತಹ ಆಕಾರ. 14, 15ಶತಾಬ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಗೋತಿಕ್ ಪದ್ಧತಿ ರಚನೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಆಕಾರ.



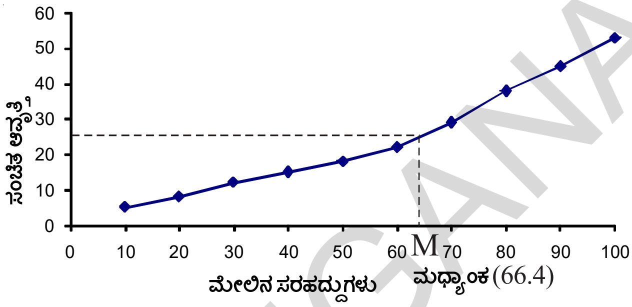

ಹಾಗೇಯೇ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆ ರಚನೆಯ ಕುರಿತು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿನ ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳು 0, 10, 20, …., 90 ಎಂದು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಸೂಕ್ತವಾದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು, Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ವರ್ಗಾಂತರದ ಕೆಳಹದ್ದು, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳ ಆಣಿತ ಯುಗ್ಮ ಅಥವಾ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) ಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಒಂದು ನಯವಾದ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು 'ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆ' ಅಥವಾ 'ಆಗೀವ್ ವಕ್ರ ರೇಖೆ ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



## 14.6.1 ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು: (OBTAINING MEDIAN FROM GIVE CURVE)

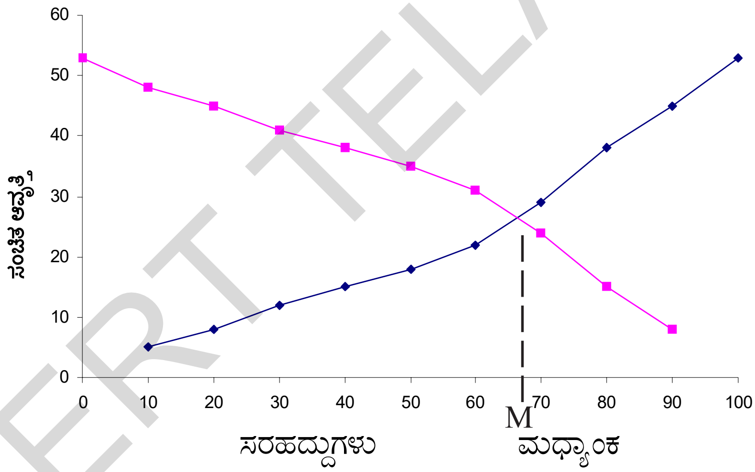
ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ ? ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಆರೋಹಣ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ ರೇಖೆಯ $y$-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮೊದಲು $\frac{n}{2}$ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ (ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$) ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x$-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆ ಎಳೆದು ಅದು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬೇಕು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x$-ಅಕ್ಷದ ರೇಖೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಲಂಬ ಪಾದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಪಕ್ಕದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.




**ಪರ್ಯಾಯ ಪದ್ಧತಿ :**

ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದ ಆರೋಹಣ, ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಎರಡು ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x$-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದಾಗ, ಆ ಲಂಬಪಾದ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

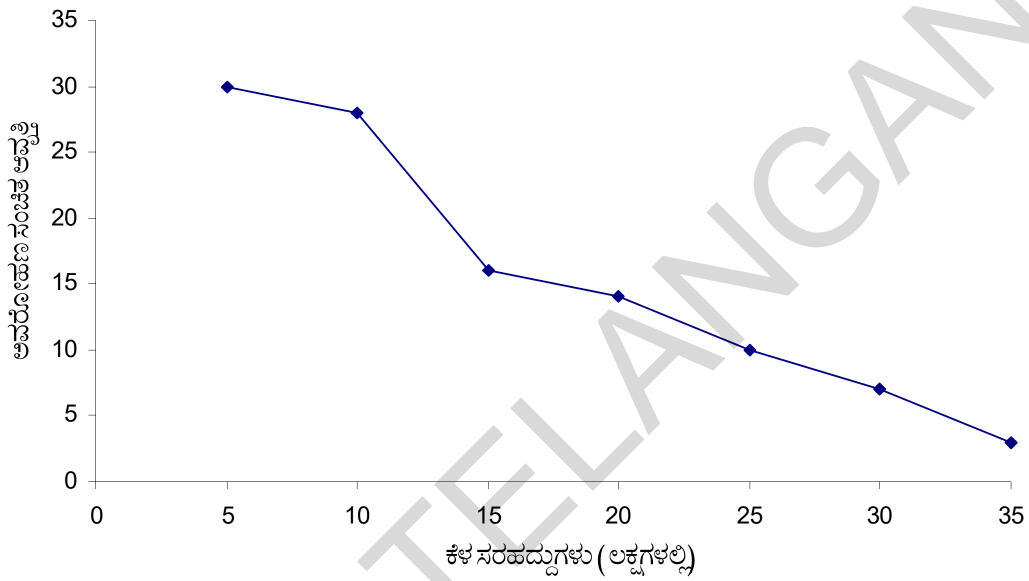



**ಉದಾಹರಣೆ -9.** ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿನ 30 ಅಂಗಡಿಗಳ ಒಂದು ವರ್ಷದ ಆದಾಯಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಲಾಭ (ಲಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) | ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (frequency) |
|---|---|
| 5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 30 |
| 10ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 28 |
| 15ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 16 |
| 20ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 14 |
| 25ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 10 |
| 30ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 7 |
| 35ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇಲ್ಲವೇ ಸಮ | 3 |

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಎರಡು ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆದರಿಂದ ಲಾಭಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

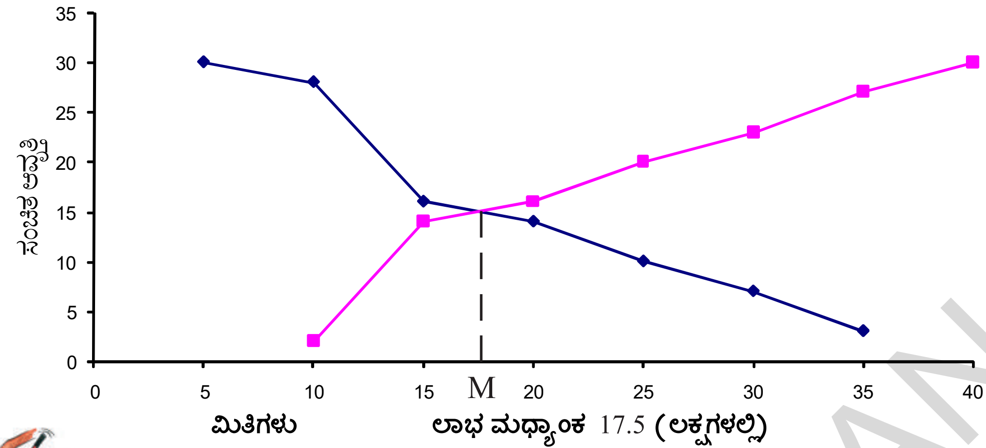
**ಪರಿಹಾರ :** ಮೊದಲು ನಾವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾದ ಕೆಳ ಸರಹದ್ದು ವರ್ಗಾಂತರಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿತ ಲಾಭಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಿ, ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು $x$-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, $y$-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ನಂತರ (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) ಮತ್ತು (35, 3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿ. ಈಗ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಒಂದು ನಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ.




ಈಗ ಕೊಟ್ಟ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರಗಳು, ಆವೃತ್ತಿಗಳಿಂದ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿದಾಗ

| ವರ್ಗಾಂತರಗಳು | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ | 2 | 12 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ | 2 | 14 | 16 | 20 | 23 | 27 | 30 |

ಮೇಲಿನ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಬಿಂದುಗಳು (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದೇ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ ಒಂದು ನಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x$-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದಾಗ, ಆ ಲಂಬಪಾದ 17.5ಯಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕ ₹ 17.5ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳು.




## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.4

1. 50 ಮಂದಿ ಕೆಲಸಗಾರರ ದಿನನಿತ್ಯದ ಸಂಪಾದನೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ದೈನಂದಿನ ಸಂಪಾದನೆ (₹ಗಳಲ್ಲಿ) | 250-300 | 300-350 | 350-400 | 400-450 | 450-500 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ | 12 | 14 | 8 | 6 | 10 |

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿ. ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸಿದ ವೈದ್ಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ತೂಕ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.) | ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 38 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 0 |
| 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 3 |
| 42 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 5 |
| 44 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 9 |
| 46 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 14 |
| 48 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 28 |
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 32 |
| 52 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 35 |

ಆರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಎರಡೂ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

3. ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿನ 100 ಮಂದಿ ರೈತರ ಹೊಲಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಹೆಕ್ಟಾರ್‌ಗೆ ಬಂದ ಧಾನ್ಯದ ಇಳುವರಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಧಾನ್ಯದ ಇಳುವರಿ (ಕ್ವಿಂಟಾಲ್ / ಹೆಕ್ಟೇರ್ ) | 50-55 | 55-60 | 60-65 | 65-70 | 70-75 | 75-80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ರೈತರ ಸಂಖ್ಯೆ | 2 | 8 | 12 | 24 | 38 | 16 |

ಈ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

**ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ ಕೆಲಸ : ಸರಾಸರಿ – ಮಧ್ಯಗತ – ಬಹುಳಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.**

★ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿನ ಸಂಘಟನೆಗಳು/ಪರಿಸರದಿಂದ/ದತ್ತಾಂಶ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ – ಆ ಸಮಾಚಾರಕ್ಕೆ – ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣಾ ಪಟ್ಟಿ ತಯಾರಿಸಿ, ಆ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಗತ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಅವಶ್ಯವಾದರೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ ರೇಖೆ (Ogive Curve) ಎಳೆದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು.

## ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

1. ಒಂದು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರಗಳು :

   (i) ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿ : $\bar{x} = \dfrac{\sum f_1 x_1}{f_1}$

   (ii) ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ : $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_1 d_1}{f_1}$ ಅಥವಾ $\bar{x} = a + \bar{d}$

   (iii) ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ವಿಚಲನೆ ಪದ್ಧತಿ : $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_1 u_1}{f_1} \times h$ ಅಥವಾ $\bar{x} = a + h\bar{d}$

2. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಬಹುಳಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ :

   ಬಹುಳಕ $= l + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

3. ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ :

   ಮಧ್ಯಾಂಕ $= l + \dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h$ ಅಥವಾ $\bar{x} = a + h\bar{d}$

4. ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ವರ್ಗಾಂತರಗಳ ಸರಹದ್ದುಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.
5. ಆರೋಹಣ, ಅವರೋಹಣ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.
6. ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರಲ್ಲಿ X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸರಹದ್ದುಗಳನ್ನು , Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
7. ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸ್ಕೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.
8. ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶದ ಎರಡು ಆಗೀವ್ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $x$-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಪಾದ ಆ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಧ್ಯಾಂಕವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಅನುಬಂಧ

# ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಗಳು-ಪದ್ಧತಿಗಳು

## (Mathematical Modelling)

### A.I.1 ಪರಿಚಯ (ಪೀಠಿಕೆ) :

ವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ತಾಂತ್ರಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅಮೇರಿಕಾ, ರಷ್ಯಾ, ಜಪಾನ್ ಮುಂತಾದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ ದೇಶಗಳ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿನಿಂತ ಭಾರತ ದೇಶವು 25 ಫೆಬ್ರವರಿ 2013ರಂದು ಇಸ್ರೋ (ISRO ಭಾರತ ಅಂತರೀಕ್ಷಾ ಪರಿಶೋಧನಾ ಸಂಸ್ಥೆ) ಯವರು PSLV C20 ಎಂಬ ವಾಹನ ನೌಕೆಯ ಮೂಲಕ ಸರಳ್ (SARAL) ಎನ್ನುವ ಉಪಗ್ರಹವನ್ನು ಕಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಪಡಿಸಿದರು. ಈ ಉಪಗ್ರಹದ ಭಾರವು ಸುಮಾರು 407 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ. ಮತ್ತು ಇದು ಭೂಮಿಯಿಂದ 781 ಕಿ.ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದು 98.5º ಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಓದಿದಾಗ ನಮಗೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಂಶಯಗಳು ತಲೆದೋರುತ್ತವೆ. ಅವೇನೆಂದರೆ

(i) ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು, ಉಪಗ್ರಹವು 781ಕಿ.ಮೀ.ಗಳ ಎತ್ತರದಲ್ಲೇ ಪರಿಭ್ರಮಣ ಮಾಡುತ್ತದೆಂದು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಲ್ಲರು ? ನಿಜವಾಗಲೂ ಅವರು ಅಂತರಿಕ್ಷಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅದರ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆದಿರುತ್ತಾರೆಯೇ ?

(ii) ಪರಿಭ್ರಮಣ ಕೋನವು 98.5º ಎಂದು ಹೇಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟರು ?

ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅದ್ಭುತವಾದ ವಿಷಯಗಳು, ನಮ್ಮನ್ನು ಆಶ್ಚರ್ಯವಂತರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೇ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಲಿ, ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಾಗಲೀ, ಇಷ್ಟು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಈ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಂದಾಜಿಸಿದ್ದಾರೆ? ಎಂದು ನಾವು ಚಕಿತರಾಗುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

(i) ಸೂರ್ಯನ ಮೇಲ್ಮೈ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆ ಸರಿಸುಮಾರು 6,000ºC. ಇರುತ್ತದೆ.

(ii) ಮಾನವನ ಹೃದಯ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬಾರಿ 5ರಿಂದ 6 ಲೀಟರ್‌ಗಳ ರಕ್ತವನ್ನು ಶುದ್ಧಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

(iii) ಸೂರ್ಯನಿಗೂ, ಭೂಮಿಗೂ ನಡುವಿನ ದೂರ 1,49,000 ಕಿ.ಮೀ.ಗಳು

ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಜ್ಞಾನಿಯೂ ಸಹ ಸೂರ್ಯನ ಮೇಲೆ ಹೋಗಿ ಉಷ್ಣೋಗ್ರತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಲಿಲ್ಲ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾನವನ ಹೃದಯವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದು ಅದು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್‌ಗಳ ರಕ್ತವನ್ನು ಶುದ್ಧಿ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಇಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ?

**'ಗಣಿತದ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿ'**ಗಳ ಮೂಲಕ ಇಂತಹ ಊಹೆಗೆ ಎಟುಕದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಪರಿಷ್ಕಾರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಗಣಿತ ಮಾದರಿ-ಪದ್ಧತಿ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು, ಮೇಧಾವಿಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಅದು ನಮ್ಮ ತಪ್ಪು ಕಲ್ಪನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ನಾವು ₹100 ನ್ನು ಬೇರೆಯರವರಿಗೆ 10% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಸಾಲವಾಗಿಕೊಟ್ಟಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಷ ನಂತರ ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಬರುತ್ತದೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ಇಲ್ಲವೇ ನಮ್ಮ ಮನೆಯ ಕೊಠಡಿಯ ಗೋಡೆಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್‌ಗಳ ಪೆಯಿಂಟ್ ಅವಶ್ಯಕವೋ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಗಣಿತ ಮಾದರಿ-ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ.

**ಆಲೋಚಿಸಿ-ಚರ್ಚಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ**

ನಾವು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಅಳೆಯಲಾಗದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಮಾದರಿ-ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಬಹುದಾದ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿನ ಇನ್ನಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

## A.I.2 ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಗಳು (Mathematical Models)

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆಯೋ ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ ?

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ ಅಲ್ಲವೇ !

ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ $I = \frac{PTR}{100}$. ಈ ಸೂತ್ರ ಅಥವಾ ಸಮೀಕರಣ ಎಂಬುದು ಬಡ್ಡಿ (I); ಅಸಲು (P); ಕಾಲ (T); ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿಯ ದರ (R) ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

(i) ವೇಗ (S) $= \frac{\text{ದೂರ } (d)}{\text{ಕಾಲ } (t)}$

(ii) ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿನ ಮೊತ್ತ (A) $= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

ಇಲ್ಲಿ P = ಅಸಲು

r = ಬಡ್ಡಿದರ

n = ಬಡ್ಡಿ ಕಟ್ಟುವ ಅವಧಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ದರಿಂದ,

***'ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಳಸುವ ಗಣಿತದ ವಿವರಣೆಗಳು ಅಥವಾ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೇ ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಗಳು' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.***

**ಇವನ್ನು ಮಾಡಿರಿ :**

ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

## A.I.3 ಗಣಿತದ ಮಾದರಿ - ಪದ್ಧತಿ (Mathematical Modelling)

ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು ಆ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಗಣಿತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ನಂತರದ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಸಾಧನೆ, ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಷ್ಕಾರಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವುದೋ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂದು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಂಡು, ಅದರಡಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನೇ **'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಯ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-1.** ವಾಣಿ ₹19,000 ಬೆಲೆ ಬಾಳುವ ಒಂದು ವಾಷಿಂಗ್ ಮಿಷಿನ್‌ನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದಿದ್ದಾಳೆ. ಆದರೆ ಆಕೆಯ ಬಳಿ ಕೇವಲ ₹15,000 ಮಾತ್ರವೇ ಇದೆ. ಉಳಿದ ಹಣಕ್ಕಾಗಿ ಆಕೆ ತನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಹಣವನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 8% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಗೆ ಸಾಲವಾಗಿ ಕೊಡಬೇಕೆಂದಿರುವಳು. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ವಾಣಿಗೆ ಉಳಿದ ಹಣ ಬಂದು, ತಾನು ಅಂದುಕೊಂಡ ವಾಷಿಂಗ್ ಮಿಷಿನ್ ಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲಳು ?

**ಹಂತ 1 : (ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು):** ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಯಾವ ಯಾವ ಅಂಶಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ? ಇನ್ನೂ ಏನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆಯೆಂದು ಗ್ರಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಅಸಲು, ಬಡ್ಡಿದರವನ್ನು ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ವಾಣಿ ಸಾಲವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಸಲು ಹಣ ₹15000 , ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ₹19000 ಆಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

**ಹಂತ 2 : (ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರೀಕರಣ) :** ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಪದಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತೃತ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಬರೆದುಕೊಂಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಸಮೀಕರಣ ಇಲ್ಲವೇ ಅಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಂಡು ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಸಮಾಚಾರಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸೂತ್ರ

$I = \dfrac{PTR}{100}$ (ಮಾದರಿ) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ P = ಅಸಲು (Principle), T = ಕಾಲ (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) (Number of Years)

R = ಬಡ್ಡಿದರ (Rate of Interest), $I$ = ಸರಳಬಡ್ಡಿ (Interest) ಈ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಾಲ(T)ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$T = \dfrac{100I}{RP}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 3: (ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು)** ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, 2ನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಾಣಿ ಹತ್ತಿರ ಈಗ ಇರುವ ಹಣ ಕೇವಲ ₹15,000 ಮೊತ್ತವೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದೇ ನಮಗೆ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಅಸಲು (P) ಆಗುತ್ತದೆ.

₹19000 ಬೆಲೆ ಇರುವ ವಾಷಿಂಗ್ ಮಿಷಿನ್ ಕೊಳ್ಳಲು ವಾಣಿಗೆ ಇನ್ನೂ (19000-15000) = ₹4000 ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಇದು ಬಡ್ಡಿ ($I$)ಗೆ ಸಮಾನ.

$$\text{P} = ₹15{,}000,\ \text{R} = 8\%,\quad \text{ಆಗ}\ \text{I} = 4000;\ \text{T} = \frac{100 \times 4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{150\cancel{0}\cancel{0} \times 8} = \frac{40\cancel{0}}{12\cancel{0}}$$

$$\text{T} = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3}\ \text{ವರ್ಷಗಳು}$$

**ಹಂತ 4 : (ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ ):** ಮೇಲಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಬಂದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ನಮಗೆ T = $3\dfrac{1}{3}$ ವರ್ಷಗಳು ಎಂದು ಬಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ 3 ವರ್ಷ ಮತ್ತು ಹಾಗೆಯೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 3ನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಎಂದು ಅಥವಾ 3 ವರ್ಷ 4ತಿಂಗಳೆಂದು ಅರ್ಥ. ಅಂದರೆ ವಾಣಿ 3 ವರ್ಷ 4ತಿಂಗಳ ನಂತರ ತಾನು ಆಸೆಪಟ್ಟ ವಾಷಿಂಗ್ ಮಿಷಿನ್ ಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲಳು.

**ಹಂತ 5 : (ಮಾದರಿಯ ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆ):** ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಬಂದ ಸಾಧನೆ (ಫಲಿತಾಂಶ) ನಿಜಜೀವನನದಲ್ಲಿ ಸರಿಹೊಂದುವುದೆಂದು ವಿಶ್ವಾಸವಿಡಲಾರೆವು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಾಧನೆ ನಮಗೆ ಸರಿಹೋಂದುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಮತ್ತೇ ಮತ್ತೇ ನಮ್ಮ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ, ಅದನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 2 ಅಂಶಗಳು ಯಾವಗಲೂ ಬದಲಾಗದೆಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಂಡು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದೆವು. ಅವೆಂದರೆ (i) ಬಡ್ಡಿದರ (ii)ವಾಷಿಂಗ್‌ಮಿಷಿನ್ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷವು ₹19000 ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ಎರಡೂ ಬೆಲೆಗಳು ಬದಲಾದರೆ $\dfrac{PTR}{100}$ ಎಂಬುದು ಮಾದರಿ ನಮಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-2.** ಲೋಕೇಶ್ವರ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ 50 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವರ ಗಣಿತ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರನ್ನೂ ಸೇರಿ ಲೋಕೇಶ್ವರದಿಂದ ಹೈದ್ರಾಬಾದಿಗೆ ವಿಹಾರ ಯಾತ್ರೆಗಾಗಿ ಹೊರಡಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದೊಂದು ವಾಹನದಲ್ಲಿ ಡ್ರೈವರ್‌ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಕೇವಲ 6 ಜನರು ಮಾತ್ರವೇ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರು ಎಷ್ಟು ವಾಹನಗಳನ್ನು ಬಾಡಿಗೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ?

**ಹಂತ 1 :** ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ವಾಹನದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಡ್ರೈವರ್‌ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ 6ಜನರೆಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 51ಜನರು ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವಷ್ಟು ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

**ಹಂತ 2 :** ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = (ಒಟ್ಟು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು) / (ಒಂದೊಂದು ವಾಹನದ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ)

**ಹಂತ 3 :** ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 51/6 = 8.5

**ಹಂತ 4 : ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ/ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ :** ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 8.5 ಆಗಿ ಇರದೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾಡಿಗೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 8.5 ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಆಗಿರಬೇಕು.

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 9.

**ಹಂತ 5 : ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆ** : ಈ ಗಣಿತ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ತೆಳುವಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ದಪ್ಪವಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಲ್ಲರೂ ಸಮಾನವಾದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳವರೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗೆ ಭಾವಿಸದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಈ ಮಾದರಿ ನಮಗೆ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬಾರದು.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

1. ನಿಮ್ಮ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಲಿಖಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯನ್ನು' ತಯಾರಿಸಿ ಆ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಕಾರು A ಎನ್ನುವ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಹೊರಟು 40 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ. ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ, B ಎಂಬುವ ಗಮ್ಯಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೇರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಕಾರು Bನಿಂದ ಹೊರಟು 30ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ವೇಗದೊಂದಿಗೆ A ಕಡೆಗೆ ಹೊರಡುತ್ತದೆ. A, Bಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 100 ಕಿ.ಮೀ. ಗಳಾದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಕಾರುಗಳು ಎಷ್ಟು ಸಮಯದ ನಂತರ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ ? ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಗಣಿತದ ಮಾದರಿ ತಯಾರಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ನಾವು ಸರಳವಾದ ಲಿಖಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು' ಸಿದ್ದಪಡಿಸಿದೆವು. ಈಗ ಒಂದು ನೈಜ ಜೀವಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ತಯಾರಿಸ ಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-3.** 2000ನೇಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಂತರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಒಕ್ಕೂಟ ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ (U.N.O) ಸದಸ್ಯತ್ವವಿರುವ 191 ದೇಶಗಳು, ಲಿಂಗ ತಾರತಮ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಲು ಒಂದು ಒಪ್ಪಂದವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿಕೊಂಡಿತು. ಅದರಲ್ಲಿನ ಭಾಗವಾಗಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ, ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಲಕಿಯರ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕೆಂಬ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಈ ಒಪ್ಪಂದಕ್ಕೆ ಭಾರತ ದೇಶವೂ ಸಹ ಸಹಿ ಮಾಡಿದೆ. ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಯಲ್ಲಿನ ಬಾಲಕಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಇದೆ.

**ಪಟ್ಟಿ A.I.1**

| ವರ್ಷ | ದಾಖಲಾತಿ (ಪ್ರತಿಶತ %) |
|---|---|
| 1991 – 92 | 41.9 |
| 1992 – 93 | 42.6 |
| 1993 – 94 | 42.7 |
| 1994 – 95 | 42.9 |
| 1995 – 96 | 43.1 |
| 1996 – 97 | 43.2 |
| 1997 -98 | 43.5 |
| 1998 – 99 | 43.5 |
| 1999 – 2000 | 43.6 |
| 2000 – 01 | 43.7 |
| 2001 - 02 | 44.1 |

ಮೇಲಿನ ಸಮಾಚಾರದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಲಕಿಯರ ದಾಖಲಾತಿಯ ಮಟ್ಟ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿದೆಯೋ ತಿಳಿಸಿ, 50% ದಾಖಲಾತಿ ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತಲುಪುತ್ತೇವೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ.

**ಸಾಧನೆ-: ಹಂತ 1 :** (ಸೂತ್ರೀಕರಣ) ಮೊದಲು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯಾರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪಟ್ಟಿ A.I.1 ನಮಗೆ 1991 – 92, 1992- 93 ಮೊದಲಾದ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿರುವ ದಾಖಲಾತಿ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ನಾವು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷಗಳನ್ನು 1991, 1992 ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಪಟ್ಟಿ A.I.1. ನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಲಕಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ನಮಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ 50% ದಾಖಲು ಹಂತವನ್ನು ತಲುಪಬಲ್ಲೆವು ಎಂಬುದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಈ ದಾಖಲಾತಿ ಹಂತವನ್ನು ತಲುಪಬಲ್ಲೆವು ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. (ಉದಾರಣೆಗೆ ₹ 15000 ವನ್ನು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 8% ಬಡ್ಡಿದರದಂತೆ 3 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಲ್ಲಿ, ಆ 3 ವರ್ಷಗಳು 1999 ರಿಂದ 2002 ಇಲ್ಲವೇ 2001 ರಿಂದ 2004 ವರೆಗೆ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿದರ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಗೆ ಕೊಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ.)

ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ 1991 ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಉಳಿದ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾತಿ ಮಟ್ಟ ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚಿದೆಯೆಂದು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು 1991ನ್ನು 0 ವರ್ಷವಾಗಿ ಮತ್ತು 1992ನ್ನು 1 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ 1991 ರ ನಂತರ 1 ವರ್ಷ ಕಳೆದಿದೆಯಾದ್ದರಿಂದ. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ 1993ನ್ನು 3 ಎಂದು 1994 ನ್ನು 4ರಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ ಪಟ್ಟಿಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

**ಪಟ್ಟಿ A.I.2**

| ವರ್ಷ | ದಾಖಲಾತಿ (ಪ್ರತಿಶತ %) |
|---|---|
| 0 | 41.9 |
| 1 | 42.6 |
| 2 | 42.7 |
| 3 | 42.9 |
| 4 | 43.1 |
| 5 | 43.2 |
| 6 | 43.5 |
| 7 | 43.5 |
| 8 | 43.6 |
| 9 | 43.7 |
| 10 | 44.1 |

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲೂ ದಾಖಲಾತಿ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆಯೋ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿ A.I.3ನಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ

**ಪಟ್ಟಿ A.I.3**

| ವರ್ಷ | ದಾಖಲಾತಿ (ಪ್ರತಿಶತ %) | ಹೆಚ್ಚಳ |
|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 0.7 |
| 2 | 42.7 | 0.1 |
| 3 | 42.9 | 0.2 |
| 4 | 43.1 | 0.2 |
| 5 | 43.2 | 0.1 |
| 6 | 43.5 | 0.3 |
| 7 | 43.5 | 0 |
| 8 | 43.6 | 0.1 |
| 9 | 43.7 | 0.1 |
| 10 | 44.1 | 0.4 |

1991 ರಿಂದ 1992, ನೇ ವರ್ಷಗಳ ನಡುವೆ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾತಿ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣ 41.9% ನಿಂದ 42.6% ಗೆ ಅಂದರೆ 0.7% ಹೆಚ್ಚಳವಾಗಿದೆ. 2ನೇಯ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 42.6% ನಿಂದ 42.7%ಗೆ 0.1% ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಂವತ್ಸರಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಲಾರೆವು. ಆದರೆ ಹೆಚ್ಚಳ ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.

ಈ ಹೆಚ್ಚಳ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22 \quad \text{.... (1)}$$

ಸರಾಸರಿ 0.22 ಆದ್ದರಿಂದ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ 0.22ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುತ್ತದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

**ಹಂತ 2 : (ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿವರಣೆ)**

ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರವಾದ ಹೆಚ್ಚಳ 0.22% ಇದೆಯೆಂದು ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ನಂತರ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ (EP) $= 41.9 + 0.22$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ನಂತರ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

ಮೂರನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

ಆದ್ದರಿಂದ nನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿದ ನಂತರ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ $= 41.9 + 0.22n$, $n \geq 1$. .... (2)

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು 50% ದಾಖಲು ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ತಲುಪುವುದೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ n ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದ (ಮಾದರಿ) ಮೂಲಕ ಉತ್ಪಾದಿಸಬಹುದು.

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

**ಹಂತ 3 : ಸಾಧನೆ :** n ಬೆಲೆಗೋಸ್ಕರ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗಿ

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

**ಹಂತ 4 : (ವಿವರಣೆ) :** ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರದು, ಆದ್ದರಿಂದ 36.8ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ 37ನ್ನು ವರ್ಷದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ 50% ನ್ನು ಸೇರುವ ವರ್ಷ $1991 + 37 = 2028$.

**ಹಂತ 5 : (ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆ)** ನಾವು ನಿಜಜೀವನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಬಂದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಸರಿ ಹೊಂದುವುದೋ ಸರಿನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಹಂತ (2) ರಲ್ಲಿ ಬಂದ ಪಲಿತಾಂಶವು ನಾವು ವಾಸ್ತವವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹಂತ (2)ರ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿ A.I.4ನಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

**ಪಟ್ಟಿ A.I.4**

| ವರ್ಷ | ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ (ಶೇಕಡಾಗಳಲ್ಲಿ %) | ಹಂತ 2ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು (ಶೇಕಡಾಗಳಲ್ಲಿ%) | ವ್ಯತ್ಯಾಸ (ಶೇಕಡಾಗಳಲ್ಲಿ %) |
|---|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 41.90 | 0 |
| 1 | 42.6 | 42.12 | 0.48 |
| 2 | 42.7 | 42.34 | 0.36 |
| 3 | 42.9 | 42.56 | 0.34 |
| 4 | 43.1 | 42.78 | 0.32 |
| 5 | 43.2 | 43.00 | 0.20 |
| 6 | 43.5 | 43.22 | 0.28 |
| 7 | 43.5 | 43.44 | 0.06 |
| 8 | 43.6 | 43.66 | -0.06 |
| 9 | 43.7 | 43.88 | -0.18 |
| 10 | 44.1 | 44.10 | 0.00 |

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಆಧಾರವಾಗಿ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತಲೂ, ಹಂತ 2ರ ಆಧಾರವಾಗಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು ಶೇಕಡಾ 0.3% ಅಥವಾ 0.5%ಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಬರುವ ಸಮಸ್ಯೆ ಎಂದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ವರ್ಷದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 3 ರಿಂದ 5 ವರ್ಷಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕ ಹೆಚ್ಚಳ 1% ನಿಂದ 2% ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾವು ಇಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದಲ್ಲಿ ಆಗ ನಮಗೆ ಹಂತ 2 ರಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವುದೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಬೇಕೆಂದುಕೊಂಡರೆ ಈ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಪುನಃ ನಾವು ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪುನಃ ಹಂತ 2ಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬದಲಿಸಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆ ಬದಲಿಸಿ ನೋಡೋಣ.

**ಹಂತ 1 : (ಸಮೀಕರಣ ಪುನರುತ್ಪಾದನೆ ) :** ನಾವು, ದಾಖಲಾತಿ ದರವನ್ನು 0.22% ರಂತೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿ ಇದೆಯೆಂದು ಕೊಂಡರು ಈ ದೋಷವನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಲು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹಾಯ ಪುನಃ ನಾವು ನಮ್ಮ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

**ವಿವರಣೆಯ ಪುನರ್ಸಮೀಕ್ಷೆ :** ಹಂತ 2ರಲ್ಲಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳೆಲ್ಲಕ್ಕೂ ನಮಗೆ ಬಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಸರಿಯಾಗಿ ಸೂತ್ರ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

n ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ

$$= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n, \; (\text{ಇಲ್ಲಿ } n \leq 1) \quad \ldots (3)$$

ಆಗ, ಮೊದಲು ಬಂದ ಸಮೀಕರಣವು (2) ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.:

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad \ldots (4)$$

**ತಿದ್ದುಪಡಿ ಮಾಡಿದ ಸಾಧನೆ :** ಸಮೀಕರಣ (4) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ n ಬೆಲೆ

$$n = \frac{50-42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36 \text{ ಬರುತ್ತದೆ.}$$

**ವಿವರಣೆ :** n = 36 ಬಂದಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಲಕಿಯರ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣ 50% ಗೆ; 1991 + 36 = 2027ರಂದು ತಲುಪುತ್ತದೆ.

**ಸಾಧನೆಯ ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆ:** ಮತ್ತೊಂದು ಬಾರಿ ಸಮೀಕರಣ (4) ರ ಮೂಲಕ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಪಟ್ಟಿ A.I.5 ರಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

**ಪಟ್ಟಿ A.I.5**

| ವರ್ಷ | ದಾಖಲಾತಿ (ಪ್ರತಿಶತ %) | ಸಮೀಕರಣ 2ರ ಮೂಲಕ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು | ವ್ಯತ್ಯಾಸ | ಸಮೀಕರಣ 4ರ ಮೂಲಕ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು | ವ್ಯತ್ಯಾಸ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 41.90 | 0 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 42.12 | 0.48 | 42.3 | 0.3 |
| 2 | 42.7 | 42.34 | 0.36 | 42.52 | 0.18 |
| 3 | 42.9 | 42.56 | 0.34 | 42.74 | 0.16 |
| 4 | 43.1 | 42.78 | 0.32 | 42.96 | 0.14 |
| 5 | 43.2 | 43.00 | 0.20 | 43.18 | 0.02 |
| 6 | 43.5 | 43.22 | 0.28 | 43.4 | 0.1 |
| 7 | 43.5 | 43.44 | 0.06 | 43.62 | -0.12 |
| 8 | 43.6 | 43.66 | -0.06 | 43.84 | -0.24 |
| 9 | 43.7 | 43.88 | -0.18 | 44.06 | -0.36 |
| 10 | 44.1 | 44.10 | 0.00 | 44.28 | -0.18 |

ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಗಮನಿಸಿದರೆ ಸಮೀಕರಣ (4) ರ ಮೂಲಕ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮೀಕರಣ (2) ರ ಮೂಲಕ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಸಹ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಸರಾಸರಿ 0 ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

## A.I.4 ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ವಿಧಾನದ ಉಪಯೋಗಗಳು (Advantages of Mathematics Modeling)

1. ಒಂದು ನಿಜ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಬದಲಿಸಿಕೊಂಡು, ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಮಾಚಾರವನ್ನು ಹೊರಗೆಳೆಯುವುದೇ ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯ ವಿಧಾನದ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶ. ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪರಿಶೀಲನೆಯ ಮೂಲಕ ಇಲ್ಲವೇ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿಯಾಗಲೀ, ಅತ್ಯಂತ ಖರ್ಚಿನಿಂದ ಕೂಡಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಾಗಲೀ, ಸಮಾಚಾರ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಕಠಿಣವಾದಾಗ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿ' ತುಂಬಾ ಉಪಯೋಗಕರವಾಗುತ್ತದೆ.

   ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಆಗ್ರಾದಲ್ಲಿರುವ ತಾಜ್‌ಮಹಲ್ ಮೇಲೆ 'ಮಥುರ ' ಎಣ್ಣೆ ಶುದ್ಧೀಕರಣದ ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಮಾಲಿನ್ಯ ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ತಾಜ್‌ಮಹಲಿನ ಮೇಲೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕ್ಷವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡಲಾರೆವು. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಅದ್ಭುತವಾದ ಕಟ್ಟಡಕ್ಕೆ ಹಾನಿ ಉಂಟಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿ' ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

2. ಅನೇಕ ವಿಧವಾದ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಾಗಲೀ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಾಗಲೀ ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಯೋಜನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮುಖ್ಯವಾದ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಭವಿಷ್ಯದ ಯೋಜನೆ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ.

**ಉದಾಹರಣೆಗೆ**

(i) ಮಾರ್ಕೆಟಿಂಗ್ ರಂಗದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಾವ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಬೇಡಿಕೆ ಇರುತ್ತದೋ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಂಡು ಮಾರಾಟವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ.

(ii) ಪಾಠಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾತಿ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಯಾವ ಯಾವ ಆವಾಸ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಶಾಲಾವಯಸ್ಸಿನ ಮಕ್ಕಳಿದ್ದಾರೋ ಮೊದಲೇ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಂಡು ಆಯಾ ಪ್ರದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಪಾಠಶಾಲೆಗಳು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕೆಂದು ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ ನಿರ್ಣಯಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

3. ಕಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ; ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಮೀನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಮತದಾನದಲ್ಲಿ ಚಲಾಯಿಸಿದ ಮತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದು ಮೊದಲಾದ. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು 'ಅಂದಾಜಿಸುವಿಕೆ ' ಎನ್ನುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

   (i) ಮುಂಬರುವ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಇರುವ ಭವಿಷ್ಯತ್ ಜನಸಂಖ್ಯೆ.

   (ii) ಮುಂಬರುವ ಕೆಲವು ದಿನಗಳಲ್ಲಿರುವ ವಾತಾವರಣ ವಿವರಗಳು.

   (iii) ಮುಂಬರುವ ದಿನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಕ್ಷರತಾ ಮಟ್ಟದ ಪ್ರಮಾಣ.

   (iv) ಒಂದು ಮರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು.

   (v) ಮಹಾಸಮುದ್ರಗಳ ಆಳವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು.

## A.I.5 ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ವಿಧಾನದ ಪರಿಮಿತಿಗಳು (Limitations of Mathematical modeling)

ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಷ್ಕಾರವನ್ನು 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ವಿಧಾನ ತೋರಿಸುವುದೇ ?

ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ತೋರಿಸದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಇದಕ್ಕೂ ಸಹ ಕೆಲವು ಪರಿಮಿತಿಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಕೇವಲ ಒಂದು ಸೂಕ್ಷ್ಮ ರೂಪವಾಗಿಯೇ ನಾವು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ದೇಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭೂಪಟಕ್ಕೂ ನೈಜ ದೇಶಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಬಹಳಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೇಗಿರುತ್ತದೋ ಇದೂ ಸಹ ಅದರಂತೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಭೂಪಟದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶವು ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಾದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಜೆಗಳ ಜೀವನ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಅವರ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಹೇಳಲಾರೆವು. ಎಲ್ಲಿ ಆವಶ್ಯಕವಿದೆಯೋ? ಅಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವೇ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು' ಉಪಯೋಗಿಸಬಲ್ಲೆವು. ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಸಮಸ್ಯಾ ಸಾಧನೆಗಳ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯದರ ಬದಲಾಗದೆಂದು, ವಾಷಿಂಗ್‌ಮಿಷನ್ ಬೆಲೆ ಹಾಗೆಯೇ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಕೆಲವು ಊಹೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ. ಅಂದರೆ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದು ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿಗೂ ಕೆಲವು ಇತಿಮಿತಿಗಳಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

## A.I.6 ಒಂದು ಮಾದರಿಯನ್ನು ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಬಲ್ಲೆವು ?

ಒಂದು ಗಣಿತದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಗಣಿತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ಹೆಚ್ಚುವ ಅವಕಾಶಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾದರಿಯು ಕಠಿಣವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಟ್ಟು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೇ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಗಣಿತ ಮಾದರಿಯು ಸರಳವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಉತ್ತಮ ಮಾದರಿ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ ವಾಸ್ತವಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಿರುಬೇಕು.

### ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :

ಕ್ರಿ.ಶ.13ನೇ ಶತಮಾದಲ್ಲಿ ಲಿಯೋ ನಾರ್ಡೋ ಫಿಬೋನಾಕಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆ ಇದಾಗಿದೆ. ಒಂದು ವರ್ಷದ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುವ ಮೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು, ಒಂದು ಮೊಲದ ಜೋಡಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಕೊನೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಮೊಲದ ಜೋಡಿಗೆ ಜನ್ಮ ನೀಡಿ, ಮತ್ತೇ ಈ ಜೋಡಿ ಮತ್ತೇ 2 ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಜೋಡಿಗೆ ಜನ್ಮ ನೀಡಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಈ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುವುದು ಮೊದಲ 2ತಿಂಗಳು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ 2 ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಮುಂಚೆ ಎರಡು ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊಲಗಳ ಜೊತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮಾನ.

ಮೊಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುವುದೋ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ತಿಂಗಳು | ಮೊಲಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 8 |
| 6 | 13 |
| 7 | 21 |
| 8 | 34 |
| 9 | 55 |
| 10 | 89 |
| 11 | 144 |
| 12 | 233 |
| 13 | 377 |
| 14 | 610 |
| 15 | 987 |
| 16 | 1597 |

ಒಂದು ವರ್ಷದ ಕಾಲದ ನಂತರ 233 ಜೊತೆ ಮೊಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. 16 ತಿಂಗಳುಗಳ 1597 ಜೊತೆ ಮೊಲಗಳು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿ'ಯಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

ಈಗ 'ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು' ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲ ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

**ಉದಾಹರಣೆ-4. (ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು) :** ದೀಕ್ಷಿತ ಮತ್ತು ಆಶಿಷ್ ಇಬ್ಬರೂ ಸೇರಿ ಎರಡು ದಾಳಗಳೊಂದಿಗೆ ಆಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಆಗ ಆಶಿಷ್ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದ ನಂತರ ಅವುಗಳ ಮುಖಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಊಹಿಸಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ದೀಕ್ಷಿತಳಿಗೆ ಉತ್ತಮ ಬಹುಮಾನ ನೀಡುವುದಾಗಿ ಹೇಳಿದನು. ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು ಹೇಳಿದರೆ, ದೀಕ್ಷಿತ್ ಬಹುಮಾನ ಗೆಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಇರುತ್ತದೆ.

**ಸಾಧನೆ : ಹಂತ 1 (ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ) :** ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲು 2 ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರಿಳಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಯಾವ ಅಂಕೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೀಳುತ್ತದೆಯೋ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

**ಹಂತ 2 (ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿವರಣೆ) :** ದಾಳಗಳ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮುಖಗಳು ಬೀಳುವ ಅವಕಾಶವಿರುವುದೋ, ಅವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಹೇಗಿರುವುದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.

ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಯಾವ ಅಂಕೆಗಳು ಇರಬಹುದೋ ಮೊದಲೇ ಊಹಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. 2 ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಉರುಳಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ನಮಗೆ 36 ಜೊತೆಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

ಮೇಲಿನ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಅಂಕೆ ಮೊದಲನೇ ದಾಳದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸುವ ಅಂಕೆಯನ್ನು, ಎರಡನೇ ಅಂಕೆ ಎರಡನೇ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಮುಖದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸುವ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 3 (ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಾಧನೆ ) :** ಮೇಲಿನ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ನಮಗೆ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ಮತ್ತು 12 ಬೀಳುವ ಅವಕಾಶವಿದೆ. ಈ 36 ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಮೊತ್ತವು ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಎಷ್ಟೆಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸೋಣ.

| ಒಟ್ಟು | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಸಂಭವನೀಯತೆ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 7 ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{1}{6}$ ಎಂದು, ಇದು ಉಳಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

**ಹಂತ 4 (ಸಾಧನೆಗೆ ವಿವರಣೆ) :** ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 7 ಬರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 7 ಎಂದು ಅನೇಕ ಸಲ ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ದೀಕ್ಷಿತ ಬಹುಮಾನ ಗೆಲ್ಲುವ ಅವಕಾಶ ಬಹಳವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

**ಹಂತ 5 (ವಿಶ್ವಸನೀಯತೆ) :** ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅನೇಕ ಸಲ ಉರುಳಿಸಿ ಪರಸ್ಪರ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕು. ಈಗ ಪರಸ್ಪರ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಬೇಕು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಇವು ಏಕೀಭವಿಸದಿದ್ದಲ್ಲಿ ದಾಳಗಳು ನಿಷ್ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

**'ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ'** ಯಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾವು ಮೊದಲು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ವಿಷಯಗಳೇನೋ ನೋಡೋಣ.

ಇಂದಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಣವಿಲ್ಲದೇ ಯಾವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಲಾಗದು ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವದ ಸಂಗತಿ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಇದು ಎದುರಾಗುವ ಅನುಭವವೇ. ನಿತ್ಯಜೀವನದ ಬೇಡಿಕೆಗಳನ್ನು ಈಡೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ಸುಖಮಯ ಜೀವನ ಸಾಗಿಸಲು ಹಣ ಅವಶ್ಯಕ. ಪರಿಮಿತಿ ಆದಾಯವಿರುವ ಗ್ರಾಹಕರನ್ನು ಆಕರ್ಷಿಸಲು ಮಾರಾಟಗಾರರು ಅನುಸರಿಸುವ ಮಾರ್ಗವೇ **'ಕಂತು ಪದ್ಧತಿ'**

ಹಬ್ಬದ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟಗಾರರು ಮಾರಾಟವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಪ್ರವೇಶಪಡಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಂತು ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಹಕನು ವಸ್ತುವಿನ ವಾಸ್ತವ (ಸಹಜ) ಬೆಲೆಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ದರವನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ಏಕೆಂದರೆ ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ದರದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸಿ, ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು ಕಂತುಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ನಂತರದ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿ ಸಲ್ಲಿಸುವ ಹಣದ ಮೇಲೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮಾರಾಟಗಾರನು ವಿಧಿಸುತ್ತಾನೆ.

ನಾವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಆಗಾಗ್ಗೆ ಕೇಳುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಗ್ರಾಹಕದಾರನು ಸಲ್ಲಿಸುವ ನೈಜ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾರುವ ಬೆಲೆಯೆಂದು ಕಂತುಗಳ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಂಡಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಸಲ್ಲಿಸುವ ಹಣವನ್ನು **'ಪ್ರಾಂರಭ ಸಲ್ಲಿಕೆ '** (ಕ್ಯಾಷ್‌ಡೌನ್ ಪೇಮೆಂಟ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ **'ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ'** ಯಲ್ಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿತ ಮಾದರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

**ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ :**

ರವಿ ತನ್ನ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗಾಗಿ ಒಂದು ಸೈಕಲ್ ಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಮಾರುಕಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ತನಗೆ ಇಷ್ಟವಾದ ಸೈಕಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆ ₹2,400 ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ರವಿಯ ಬಳಿ ₹1,400 ಮಾತ್ರವೇ ಇದೆ. ಆಗ ಅಂಗಡಿ ಮಾಲಿಕ ರವಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಲಿಚ್ಛಿಸಿ, ಪ್ರಸ್ತುತ ₹1400 ಸಂದಾಯಿಸಿ ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹550 ರಂತೆ ಸಮಾನ ತಿಂಗಳ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಲು ತಿಳಿಸಿದನು. ಆದರೆ ರವಿ ಮಾತ್ರ ₹1000 ಗಳನ್ನು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ವರ್ಷಕ್ಕೆ 12% ದರದಂತೆ ಸರಳಬಡ್ಡಿಗೆ ಸಾಲವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಎಂದು ಕೊಂಡನು. ಈ ಎರಡು ಅವಕಾಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಲಾಭಾದಾಯಕವೋ ಸೂಚಿಸಿ ರವಿಗೆ ಸಹಾಯಪಡಿರಿ.

# ಉತ್ತರಗಳು

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.1

1. (i) 90 (ii) 196 (iii) 127

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) ಲ. ಸಾ. ಅ = 420, ಮ. ಸಾ. ಅ = 3 (ii) ಲ. ಸಾ. ಅ = 11339, ಮ. ಸಾ. ಅ = 1
   (iii) ಲ. ಸಾ. ಅ = 1800, ಮ. ಸಾ. ಅ= 1 (iv) ಲ. ಸಾ. ಅ = 216, ಮ. ಸಾ. ಅ = 36
   (v) ಲ. ಸಾ. ಅ = 22338, ಮ. ಸಾ. ಅ = 9

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.3

1. (i) 0.375 (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ (ii) 0.5725 (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ)
   (iii) 4.2 (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ) (iv) $0.\overline{18}$ (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ)
   (v) 0.064 (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ)
2. (i) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ (ii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ
   (iii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ (iv) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ
   (v) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ (vi) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ
   (vii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ (viii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ
   (ix) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ (x) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ
3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3
4. (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 1.5

1. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $-4$
   (iv) 0 (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 9
   (vii) $-3$ (viii) 3 (ix) 12

2. (i) 1 (ii) 3 (iii) 1
   (iv) $\log \frac{9}{8}$ (v) $\log 45$

2. (i) $x + y$ (ii) $x + y - 1$ (iii) $2 + x + y$
   (iv) $2 + 3x + 3y$

3. (i) $3\log 2 + 3\log 5$ (ii) $7\log 2 - 4\log 5$
   (iii) $2\log x + 3\log y + 4\log z$ (iv) $2\log p + 3\log q - \log r$
   (v) $\frac{3}{2}\log x - \log y$ (vi) 7 (vii) 3 (viii) $\frac{\log 3 - \log 2}{\log 2 + \log 3}$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.1

1. (i) ಗಣ (ii) ಗಣ ಅಲ್ಲ (iii) ಗಣ ಅಲ್ಲ
   (iv) ಗಣ (v) ಗಣ

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$
   (v) $\in$ (vi) $\in$

3. (i) $x \notin A$ (ii) $d \in B$ (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$

4. (i) ಅಸತ್ಯ (ii) ಅಸತ್ಯ (iii) ಸತ್ಯ (iv) ಅಸತ್ಯ

5. (i) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$
   (iii) $D = \{2, 3, 5\}$ (iv) $E = \{B, E, T, R\}$

6. (i) $A = \{x : x$ ಎಂಬುದು 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಮತ್ತು $x < 13\}$
   (ii) $B = \{x : x = 2^x$ , $y$ ಎಂಬುದು 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$
   (iii) $C = \{x : x = 5^y$, $y$ ಎಂಬುದು 5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$
   (iv) $D = \{x : x$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $x \leq 100\}$

7. (i) A = {51, 52, 53, .................., 98, 99}

(ii) B = {+2, – 2}

(iii) D = {L, O, Y, A}

8. (i) (c)

(ii) (a)

(iii) (d)

(iv) (b)

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.2

1. ಹೌದು, $A \cap B = B \cap A = \{1, 2, 3\}$

2. $A \cap \phi = \phi$

$A \cap A = A$

3. $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$

$B - A = \{3, 9, 12, 15\}$

4. $A \cup B = B$

5. $A \cap B =$ {ಸರಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ}

{2, 4, 6, ............}

$A \cap C = C =$ {ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ}

$A \cap D = C =$ {ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ}

$B \cap C = \phi$

$B \cap D =$ {ಸರಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ}={2}

$C \cap D =$ {4, 6, 8, 9, ................ 99}= {ಬೆಸ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}

6. (i) $A - B = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$

(ii) $A - C = \{3, 9, 15, 18, 21\}$

(iii) $A - D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

(iv) $B - A = \{4, 8, 16, 20\}$

(v) $C - A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$

(vi) D − A = {5, 10, 20}

(vii) B − C = {20}

(viii) B − D = {4, 8, 12, 16}

(ix) C − B = {2, 6, 10, 14)

(x) D − B = {5, 10, 15}

7. (i) ಅಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶ '3' ಇದೆ

(ii) ಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳ 'a' ಇದೆ.

(iii) ಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳು ಇಲ್ಲ.

(iv) ಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳು ಇಲ್ಲ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.3

1. (i) ಸಮ ಗಣ ಆಗುತ್ತದೆ (ii) ಸಮಗಣ ಅಲ್ಲ (iii) ಸಮಗಣ ಅಲ್ಲ

2. (i) ಸಮ ಗಣ ( = ) (ii) ಸಮ ಗಣಗಳಲ್ಲ ( $\neq$ ) (iii) ಸಮ ಗಣ ( = )

(iv) ಸಮ ಗಣಗಳಲ್ಲ ( $\neq$ ) (v) ಸಮ ಗಣಗಳಲ್ಲ ( $\neq$ )

(vi) ಸಮ ಗಣಗಳಲ್ಲ ( $\neq$ ) (vii) ಸಮ ಗಣಗಳಲ್ಲ ( $\neq$ )

3. (i) A = B (ii) A $\neq$ B (iii) A = B (iv) A $\neq$ B

5. (i) $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \phi$

(ii) $\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{x, y, z\}, \phi$

(iii) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}$,

$\{b, \mathrm{c}, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d), \phi$

(iv) $\phi$, {1}, {4}, {9}, {16}, {1, 4}, {1, 9}, {1, 16}, {4, 9}, {4, 16}, {9, 16},

{1, 4, 9}, {1, 9, 16}, {4, 9, 16}, {1, 4, 16}, {1, 4, 9, 14)

(v) $\phi$, {10}, {100}, {1000}, {10, 100}, {100, 1000}, {10, 1000},

{10, 100, 1000}

## ಅಭ್ಯಾಸ - 2.4

1. (i) ಶೂನ್ಯಗಣ ಅಲ್ಲ (ii) ಶೂನ್ಯಗಣ (iii) ಶೂನ್ಯಗಣ

(iv) ಶೂನ್ಯಗಣ (ii) ಶೂನ್ಯಗಣ ಅಲ್ಲ

2. (i) ಪರಿಮಿತ ಗಣ (ii) ಪರಿಮಿತ ಗಣ (iii) ಪರಿಮಿತ ಗಣ

3. (i) ಪರಿಮಿತ ಗಣ (ii) ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ (iii) ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ

(iv) ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 3.1

1. (a) (i) $-6$  (ii) $7$  (iii) $-6$

2. (i) ಅಸತ್ಯ ಏಕೆಂದರೆ $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದು $x^2$ ಸಹಗುಣಕ ಆದರೆ ಗರಿಷ್ಟಘಾತ ಅಲ್ಲ
   (ii) ಅಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ $x^2$ ನ ಸಹ ಗುಣಕ $-4$
   (iii) ಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗರಿಷ್ಟಘಾತ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೂ ಸೊನ್ನೆ ಯಾಗುತ್ತದೆ.
   (iv) ಅಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಇದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ.
   (v) ಅಸತ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಗರಿಷ್ಟ ಘಾತ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿನ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲ.

3. $p(1) = 0, p(-1) = -2, p(0) = -1, p(2) = 7, p(-2) = -9$

4. $-2$ ಮತ್ತು $-2$ ಎನ್ನುವವು $x^4$-16ರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

5. 3 ಮತ್ತು $-2$ ಎನ್ನುವವು $p(x) = x^2 - x - 6$ ರ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಆಗುತ್ತವೆ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 3.2

1. (i) ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಇಲ್ಲ  (ii) 1  (iii) 3
   (iv) 2  (v) 4  (vi) 3

2. (i) 0  (ii) $-2, -3$  (iii) $-2, -3$  (iv) $-2, 2, \pm\sqrt{-4}$

3. (i) $4, -3$  (ii) $3, 3$  (iii) ವಾಸ್ತವ ಶೂನ್ಯ ಬೆಲೆಗಳುಇಲ್ಲ
   (iv) $-4, 1$  (v) $-1, 1$

4. $p\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ ಮತ್ತು $p(-1) = 0$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 3.3

1. (i) $4, -2$  (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$
   (iv) $0, -2$  (v) $\sqrt{15}\ -\sqrt{15}$  (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$  (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$  (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
   (iv) $x^2 - x + 1$  (v) $4x^2 + x + 1$  (vi) $x^2 - 4x + 1$

3. (i) $x^2 - x - 2$  (ii) $x^2 - 3$  (iii) $4x^2 + 3x - 1$
   (iv) $4x^2 - 8x + 3$

4. -1, -1 ಮತ್ತು 3 ಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು

## ಅಭ್ಯಾಸ - 3.4

1. (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ $= x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= 7x - 9$

   (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ $= x^2 + x - 3$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= 8$

   (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ $= -x^2 - 2$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= -5x + 10$

2. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಅಲ್ಲ

3. $-1, -1$

4. $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

   (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 4.1

1. (a) ಛೇದನ ರೇಖೆಗಳು

   (b) ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೇಖೆಗಳು

   (c) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು

2. (a) ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು (b) ಅಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

   (c) ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು (d) ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರಾಧಾರಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

   (e) ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು (f) ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

   (g) ಅಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು (h) ಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

   (i) ಅಸಂಗತ ಸಮೀಕರಣಗಳು

3. ಪ್ಯಾಂಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 1$; ಸ್ಕರ್ಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 0$

4. ಬಾಲಕಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ $= 7$; ಬಾಲಕರ ಸಂಖ್ಯೆ $= 3$

5. ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆ $= 3$; ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ $= 5$

6. ಉದ್ದ $= 20$ ಮೀ ; ಅಗಲ $= 16$ ಮೀ

7. (i) $3x + 2y - 7 = 0$

   (ii) $3x + 3y - 12 = 0$

   (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

8. ಉದ್ದ = 40 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು ; ಅಗಲ = 30 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು
9. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 16; ಬೆಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

## ಅಭ್ಯಾಸ- 4.2

1. ಮೊದಲನೆಯ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಆದಾಯ = ₹ 18000; ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಆದಾಯ = ₹ 14000
2. 42 ಮತ್ತು 24
3. ಕೋನಗಳು : $99^o$ ಮತ್ತು $81^o$
4. (i) ಸ್ಥಿರ ಚಾರ್ಜನ ಬೆಲೆ = ₹ 40; ಒಂದು ಕಿ. ಮೀ ಗೆ ಚಾರ್ಜ್ = ₹ 18 (ii) ₹ 490
5. $\frac{7}{9}$
6. 60 ಕಿ. ಮೀ/ಗಂ ; 40 ಕಿ. ಮೀ/ಗಂ
7. $59^o$ ಮತ್ತು $31^o$
8. 659 ಮತ್ತು 723
9. 40 ಮಿ.ಲೀ ಮತ್ತು 60 ಮಿ.ಲೀ
10. ₹ 7200 ಮತ್ತು ₹ 4800

## ಅಭ್ಯಾಸ - 4.3

1. (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)
   (iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
   (vii) (3, 2) (viii) (1, 1)
2. (i) ದೋಣಿಯ ವೇಗ = 8 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ ಪ್ರವಾಹ ವೇಗ = 3 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ
   (ii) ರೈಲಿನ ವೇಗ= 60 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ; ಕಾರಿನ ವೇಗ= 80 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ
   (iii) ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು ಪುರುಷನಿಗೆ ಹಿಡಿಯುವ ದಿನಗಳು = 18;
   ಕೆಲಸ ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು ಸ್ತ್ರೀಗೆ ಹಿಡಿಯುವ ದಿನಗಳು = 36

## ಅಭ್ಯಾಸ- 5.1

1. (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಅಲ್ಲ
   (iv) ಹೌದು (v) ಹೌದು (vi) ಅಲ್ಲ
   (vii) ಅಲ್ಲ (viii) ಹೌದು

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 8$ ($x$ = ಅಗಲ)

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$ ($x$ = ಚಿಕ್ಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ )

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ ($x$ = ರೋಹನ್‌ನ ವಯಸ್ಸು )

(iv) $x^2 - 8x + 1280 = 0$ ($x$ = ರೈಲಿನ ವೇಗ )

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.2

1. (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$

(vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$

2. 13, 14
3. 17, 18;
4. 5 ಸೆಂ. ಮೀ , 12ಸೆಂ. ಮೀ
5. ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 6; ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ = ₹15
6. 4 ಮೀ; 10 ಮೀ
7. ಪಾದ = 12 ಸೆಂ. ಮೀ ; ಎತ್ತರ = 8 ಸೆಂ. ಮೀ
8. 15 ಕಿ.ಮೀ, 20 ಕಿ.ಮೀ
9. 20 ಅಥವಾ 40
10. 9 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.3

1. (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\frac{-3}{5}, 2$ (iv) $-1, -5$

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 ವರ್ಷಗಳು

5. ಗಣಿತ = 12, ಇಂಗ್ಲೀಷು = 18 (ಅಥವಾ) ಗಣಿತ = 13, ಇಂಗ್ಲೀಷು = 17

6. 120 ಮೀ, 90ಮೀ
7. 18, 12; $-18, -12$
8. 40 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ
9. 15 ಗಂಟೆಗಳು , 25 ಗಂಟೆಗಳು
10. ಪ್ಯಾಸೆಂಜರ್ ರೈಲಿನ ವೇಗ = 33 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ

    ಎಕ್ಸ್‌ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನ ವೇಗ = 44 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂ
11. 18 ಮೀ; 12 ಮೀ
12. 6 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು
13. 13 ಬಾಹುಗಳು ; ಅಲ್ಲ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 5.4

1. (i) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಇಲ್ಲ

   (ii) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ ಮೂಲಗಳು ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

   (iii) ಮೂಲಗಳು ಸಂಮಿಶ್ರ ; $\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$
3. ಹೌದು ; 40 ಮೀ; 20 ಮೀ
4. ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ
5. ಹೌದು; 20 ಮೀ; 20 ಮೀ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. (i) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತದೆ (ii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

   (iii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆಗುತ್ತದೆ (iv) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ
2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$

   (iii) $4, 1, -2, -5$ (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

   (v) $-1.25, -1.5, -1.75, -2$
3. (i) $a_1 = 3; \quad d = -2$ (ii) $a_1 = -5; \quad d = 4$

   (iii) $a_1 = \frac{1}{3}; \quad d = \frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6; \quad d = 1.1$

4. (i) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲ.

(ii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $-9.2, \ -11.2, \ -13.2$

(iv) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = 6, 10, 14

(v) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$

(vi) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(vii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $-16, \ -20, \ -24$

(viii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$

(ix) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(x) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $5a, 6a, 7a$

(xi) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

(xii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ(AP), ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳು = $\sqrt{50}, \ \sqrt{72}, \ \sqrt{98}$

(xiii) ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. (i) $a_8 = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$
   (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$
2. (i) $-77$ (ii) 22
3. (i) $a_2 = 14$
   (ii) $a_1 = 18;$ $a_3 = 8$
   (iii) $a_2 = \frac{13}{2};$ $a_3 = 8$
   (iv) $a_2 = -2;$ $a_3 = 0;$ $a_4 = 2;$ $a_5 = 4$
   (v) $a_1 = 53;$ $a_3 = 23;$ $a_4 = 8;$ $a_5 = -7$
4. 16ನೇ ಪದ
5. (i) 34 (ii) 27

6. ಅಲ್ಲ 7. 178 8. 5 9. 1

10. 100 11. 128 12. 60 13. 13

14. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ = 4, 10, 16, .... 15. 158

16. $-13, -8, -3$ 17. 11

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.3

1. (i) 245 (ii) $-180$ (iii) 555 (iv) $\frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$

2. (i) $\frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) $-8930$

3. (i) n = 16, 440 (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$

   (iii) $a = 4, S_{12} = 246$ (iv) $d = -1,\ a_{10} = 8$

   (v) $x = 5;\ a_5 = 37$ (vi) $x = 7;\ a = -8$

   (vii) $a = 4$

4. $n = 38;$ $S_{38} = 6973$

5. 5610

6. $n^2$

7. (i) 525 (ii) $-465$

8. $S_1 = 3;$ $S_2 = 4;$ $a_2 = 1;$ $a_3 = -1;$ $a_{10} = -15$

   $a_n = 5 - 2n$

9. 4920 10. 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

11. 234 12. 143 ಸೆಂ.ಮೀ 13. $n = 16$, $a_n = 5$ 14. 370

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.4

1. (i) ಹೌದು (ii) ಅಲ್ಲ (iii) ಹೌದು

2. (i) 4, 12, 36, .... (ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, \ldots$

   (iii) 81, $-27$, 9, .... (iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$

3. (i) ಆಗುತ್ತದೆ ; 32, 64, 128 (ii) ಆಗುತ್ತದೆ, $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

   (iii) ಅಲ್ಲ (iv) ಹೌದು; $-54, -162, -486$ (v) ಅಲ್ಲ

   (vi) ಆಗುತ್ತದೆ ; $-81, 243, -729$ (vii) ಆಗುತ್ತದೆ; $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \ldots\ldots$

   (viii) ಆಗುತ್ತದೆ; $-16,\ 32\sqrt{2},\ -128$ (ix) ಆಗುತ್ತದೆ; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4. 2

## ಅಭ್ಯಾಸ - 6.5

1. (i) $r = \frac{1}{2}$; $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $r = -3$; $a_n = 2(-3)^{n-1}$

(iii) $r = 3$; $a_n = -1(3)^{n-1}$

(iv) $r = \frac{2}{5}$; $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2. $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$

3. (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4. (i) 5ನೇ (ii) 12 ನೇ (iii) 7ನೇ

5. $3 \times 2^{10}$ 6. $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \ldots$ 7. 5

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39

3. ಏಕರೇಖಾತ್ಮಕಗಳಲ್ಲ 4. ಹೌದು 5. ಜರೀನಾ 8.72 ಚ. ಯೂ

9. (i) ಚೌಕ (ii) ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ (iii) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

10. $(-7, 0)$ 11. 7 ಅಥವಾ $-5$

12. 3 ಅಥವಾ $-9$ 13. $4\sqrt{5}$ ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು 15. $x + By = 17$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.2

1. $(1, 3)$ 2. $\left(2, \frac{-5}{3}\right)$ ಮತ್ತು $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$

3. $2 : 7$ 4. $x = 6$; $y = 3$

5. $(3, -10)$ 6. $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

7. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

8. $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$  9. $\left(\frac{5a-b}{5}, \frac{5a+b}{5}\right)$

10. (i) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$  (ii) $\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$  (iii) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.3

1. (i) $10\frac{1}{2}$ ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು  (ii) 32 ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು (iii) 3 ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

2. (i) K = 4  (ii) K = 3  (iii) $K = \frac{7}{3}$

3. 1 ಚ. ಯೂನಿಟ್; 1 : 4  4. 28 ಚ. ಯೂನಿಟ್ 5. 6 ಚ. ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು

## ಅಭ್ಯಾಸ - 7.4

1. (i) 6  (ii) $\sqrt{3}$  (iii) $\frac{4b}{a}$  (iv) $\frac{-b}{a}$

(v) $-5$  (vi) 0  (vii) $\frac{1}{7}$  (viii) $-1$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.1

4. $x =$ 5 ಸೆಂ. ಮೀ ಮತ್ತು $y = 2\frac{13}{16}$ ಸೆಂ. ಮೀ ಅಥವಾ 2.8125 ಸೆಂ. ಮೀ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.2

1. (ii) DE = 2.8 ಸೆಂ. ಮೀ

2. 8 ಸೆಂ. ಮೀ  3. 1.6 ಮೀ  7. 16 ಮೀ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 8.3

3. 1:4  4. $\sqrt{2}-1$  6. 96 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$  8. 3.5 ಸೆಂ. ಮೀ

## ಅಭ್ಯಾಸ- 8.4

8. $6\sqrt{7}$ ಮೀ   9. 13 ಮೀ   12. 1:2

## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.1

1. (i) ಒಂದು   (ii) ಛೇದಕ ರೇಖೆ   (iii) ಎರಡು
   (iv) ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು   (v) ಅಸಂಖ್ಯಾತ
2. PQ = 12 ಸೆಂ. ಮೀ   4. 12 ಸೆಂ. ಮೀ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.2

1. (i) d   (ii) a   (iii) b   (iv) a   (v) c
2. 8 ಸೆಂ. ಮೀ   4. AB = 15 ಸೆಂ. ಮೀ, AC = 9 ಸೆಂ. ಮೀ
5. 8 ಸೆಂ. ಮೀ   6. $2\sqrt{5}$ ಸೆಂ. ಮೀ   9. ಎರಡು

## ಅಭ್ಯಾಸ - 9.3

1. (i) 28.5 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   (ii) 285.5 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$
2. 88.368 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   3. 1254.96 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   4. 57 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$
5. 10.5 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   6. 6.125 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   7. 102.67 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$
8. 57 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.1

1. 5500 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   2. 154000 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$ (15.4 ಮೀ$^2$)   3. 264 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ
4. 1 : 2   5. 21   7. 21175 ಸೆಂ. ಮೀ$^3$
8. 301.44ಮೀ$^3$; 188.1ಮೀ$^2$   9. 37 ಸೆಂ. ಮೀ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.2

1. 103.62 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   2. 1155.52 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   3. 220 ಮಿ.ಮೀ$^2$
4. 160 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$   5. ₹ 827.20
7. $a^2\left(5+\frac{\pi}{2}\right)$ ಚ.ಸೆಂ. ಮೀ   8. 374 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.3

1. 693 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ
2. ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ = 21 ಸೆಂ. ಮೀ; ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 794.64 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$
3. 89.83 ಸೆಂ. ಮೀ$^3$
4. 616 ಸೆಂ. ಮೀ$^3$
5. 309.57 ಸೆಂ. ಮೀ$^3$
6. 150
7. 523.9 ಸೆಂ. ಮೀ$^3$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 10.4

1. 2.74 ಸೆಂ. ಮೀ
2. 12 ಸೆಂ. ಮೀ
3. 2.5 ಮೀ
4. 5 ಮೀ
5. 10
6. 400
7. 100
8. 672

## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

1. $\sin A = \frac{15}{17}$; $\cos A = \frac{8}{17}$; $\tan A = \frac{15}{8}$
2. $\frac{527}{168}$
3. $\cos\theta = \frac{7}{25}$; $\tan\theta = \frac{24}{7}$
4. $\sin A = \frac{5}{13}$; $\tan A = \frac{5}{12}$
5. $\sin A = \frac{4}{5}$; $\cos A = \frac{3}{5}$
7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{\sqrt{113}+8}{7}$
8. (i) 1 (ii) 0

## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.2

2. (I) $\sqrt{2}$ (II) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (III) 1
   (iv) 2 (v) 1
2. (i) c (ii) d (iii) c
3. 1
4. ಹೌದು
5. QR = $6\sqrt{3}$ ಸೆಂ. ಮೀ; PR = 12 ಸೆಂ. ಮೀ
6. $\angle YXZ = 60^\circ$; $\angle YXZ = 30^\circ$
7. ಅಲ್ಲ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.3

1. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0
   (iv) 1 (v) 1

3. $A = 36^\circ$ 6. $\cos 15^\circ + \sin 25^\circ$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 11.4

1. (i) 2 (ii) 2 (iii) 1

6. 1 8. 1 9. $\frac{1}{p}$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 12.1

1. 15 ಮೀ 2. $6\sqrt{3}$ ಮೀ 3. 4 ಮೀ

4. $60^\circ$ 5. 60 ಮೀ 6. $4\sqrt{3}$ ಮೀ

7. 8.3136 ಮೀ 8. 300 ಮೀ 9. 15 ಮೀ 10. 7.5 ಸೆಂ. ಮೀ$^2$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 12.2

1. ಟವರ್‌ನ ಎತ್ತರ $= 5\sqrt{3}$ ಮೀ; ರೋಡ್ಡಿನ ಅಗಲ = 5 ಮೀ

2. 32.908 ಮೀ 3. 1.464 ಮೀ 4. 19.124 ಮೀ

5. 7.608 ಮೀ 6. 10 ಮೀ 7. 51.96ಅಡಿಗಳು ; 30 ಅಡಿಗಳು

8. 6 ಮೀ

9. 200 ಮೀ/ಸೆಂ.

## ಅಭ್ಯಾಸ - 13.1

1. (i) 1 (ii) 0, ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ (iii) 1, ಖಚಿತ ಘಟನೆ
   (iv) 1 (v) 0, 1

2. (i) ಅಲ್ಲ (ii) ಅಲ್ಲ (iii) ಹೌದು (iv) ಹೌದು

3. 0.95 4. (i) 0 (ii) 1

5. $\frac{1}{13}, \frac{1}{3}, 1, 0$  6. 0.008

7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$  8. $\frac{1}{26}$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 13.2

1. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

2. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$

3. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$  4. $\frac{5}{13}$

5. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

6. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$
   (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

7. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) a. $\frac{1}{4}$ b. 0

8. $\frac{11}{12}$  9. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$

10. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

11. $\frac{11}{84}$  12. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

13.

| ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ಸಂಭವನೀಯತೆ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

14. $\frac{3}{4}$  15. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.1

1. ಸರಾಸರಿ ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 8.1
2. ₹ 313 3. $f = 20$ 4. 75.9 5. 22.31
6. ₹ 211 7. 0.099 ppm 8. 49 ದಿನಗಳು 9. 69.43%

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.2

1. ಬಹುಳಕ = 36.8 ವರ್ಷಗಳು, ಸರಾಸರಿ = 35.37 ವರ್ಷಗಳು,
2. ಬಹುಳಕ 65.625 ಗಂಟೆಗಳು
3. ಬಹುಳಕ = ₹ 1847.83, ಸರಾಸರಿ = ₹ 2662.5.
4. ಬಹುಳಕ = 30.6, ಸರಾಸರಿ = 29.2.
5. ಬಹುಳಕ = 4608.7 ಓಟಗಳು.
6. ಬಹುಳಕ = 44.7 ಕಾರುಗಳು

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.3

1. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 137 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಸರಾಸರಿ = 137.05 ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು, ಬಹುಳಕ = 135.76ಯೂನಿಟ್‌ಗಳು
2. $x = 8, y = 7$
3. ಮಧ್ಯಾಂಕ ವಯಸ್ಸು = 35.76 ವರ್ಷಗಳು
4. ಮಧ್ಯಾಂಕದ ಉದ್ದ = 146.75 ಮಿ. ಮೀ
5. ಮಧ್ಯಾಂಕ ಜೀವಿತ ಕಾಲ = 3406.98 ಗಂಟೆಗಳು
6. ಮಧ್ಯಾಂಕ = 8.05, ಸರಾಸರಿ = 8.32, ಬಹುಳಕ = 7.88
7. ಮಧ್ಯಾಂಕದ ತೂಕ = 56.67 ಕಿ. ಗ್ರಾಂ

## ಅಭ್ಯಾಸ - 14.4

1.

| ಪ್ರತಿದಿನದ ಸಂಪಾದನೆ (₹ಗಳಲ್ಲಿ) | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|---|---|
| 300ಕ್ಕಂತ ಕಡಿಮೆ | 12 |
| 350ಕ್ಕಂತ ಕಡಿಮೆ | 26 |
| 400ಕ್ಕಂತ ಕಡಿಮೆ | 34 |
| 450ಕ್ಕಂತ ಕಡಿಮೆ | 40 |
| 500ಕ್ಕಂತ ಕಡಿಮೆ | 50 |

2.

| ಮೇಲಿನ ಸರಹದ್ದುಗಳು | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ | 12 | 26 | 34 | 40 | 50 |

3.

| ಇಳುವರಿ (ಕಿ. ಗ್ರಾಂ/ಹೆಕ್ಟೇರ್) | ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ |
|---|---|
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮ | 100 |
| 55 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮ | 98 |
| 60 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮ | 90 |
| 65 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮ | 78 |
| 70 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮ | 54 |
| 75 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಸಮ | 16 |

# ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಿಗೆ ಸೂಚನೆಗಳು

**ಆತ್ಮೀಯ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರೇ,**

ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ ರಾಜ್ಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಪರಿಧಿ ಪತ್ರ(APSCF-2011) ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾದ ಅನೇಕ ಶಿಫಾರಸ್ಸುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದದ್ದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಕಲಿಕೆಯು ಶಾಲೆಯ ಹೊರಗಿನ ಜೀವನ (ನಿಜ ಜೀವನ) ದೊಂದಿಗೆ ಮಿಳಿತಗೊಂಡಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರವು ಎಲ್ಲ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಲು ನಿರ್ಧರಿದ್ದಾರೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ (NCF-2011) NCERTರವರ ಆಧಾರಪತ್ರ, ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರದ ಸೂಚನೆಗಳ ಮೇರೆಗೆ ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳ ತಿಳುವಳಿಕೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ವಿಸ್ತೃತಗೊಳಿಸಲು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅವರ ಜೀವನಾನು ಭಾವನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ವಿಧವಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಅಂಶಗಳು ಫ್ರೌಢ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆ, ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿಸಿ ಪ್ರೌಢಹಂತದ ಗಣಿತವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅಮೂರ್ತ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಂಶಗಳ ಗಣಿತ ಸೂತ್ರೀಕರಣದಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು, ಅವುಗಳಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕ ಗಣಿತ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧವಾಗಿ ನಿಷ್ಣಾತರನ್ನಾಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು, ಸಮಸ್ಯಾ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಗಣಿತ ಪರಿಭಾಷೆ,ಸಂಕೇತಗಳನ್ನುಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ನೈಪುಣ್ಯತೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹತ್ತನೆ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತದ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು, ಪೂರ್ಣ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ನೀಡಿದ್ದೇವೆ.

ಹತ್ತನೆ ತರಗತಿ ಪಠ್ಯಾಂಶಗಳ ಭೋಧನೆ, ಕಲಿಕೆಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 6 ರಿಂದ 10 ನೇ ತರಗತಿಯವರೆಗೂ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯನ್ನು ಶೀರ್ಷಿಕೆ ಮತ್ತು ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ (Spiral Approch)ವಿಧಾನದ ಮೇಲೆ ಆಧರಿತವಾಗಿ ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಖ್ಯ ಅಮೂರ್ತ ಭಾವನೆಗಳ ಸ್ವಭಾವಗಳು, ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಪರಿಭಾಷೆಯ ಹಂತವನ್ನು ಕ್ರಮೇಣವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.ಸ್ವೀಕೃತಧಾರ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅಭ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಿ ಈ ಪದ್ದತಿಯಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹಾಯ ಪಡೆಯುವಂತೆ ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎದುರಿಸುವ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಹೊಂದಿದೆ, ಸ್ವೀಕೃತಾಧಾರ ಅಧ್ಯಯನ, ಗಣಿತ ಸಂಕೇತಗಳ ಪರಿಭಾಷೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವಂತೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ, ಚರ್ಚಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವಂತೆ "ಇವು ಮಾಡಿರಿ", "ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ"ಯಂಥ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಸಿಲಬಸ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಪಠ್ಯವಿಷಯಗಳೆಲ್ಲ ಮೂಲಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು,ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ಅನ್ವೇಷಣೆ, ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಊಹಿಸಿ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಧರಣ ವಿಧಾನ ಪದ್ದತಿಯಲ್ಲಿ ರೂಪುಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಗುಂಪು ಚರ್ಚೆ, ಚಟುವಟಿಕೆ ಆಧಾರಿತ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ನೀಡುತ್ತದೆ.

10 ನೇ ತರಗತಿ ಸಿಲಬಸ್ ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ 1) ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ದತಿ 2) ಬೀಜಗಣಿತ 3) ರೇಖಾಗಣಿತ 4) ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ 5) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ 6)ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ 7) ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂಬ 7 ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿತವಾಗಿದೆ. ಈ 7 ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಭೋಧಿಸುವ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ, ತಾರ್ಕಿಕ ಆಲೋಚನೆ, ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ನೀಡಿದ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ಗಣಿತವನ್ನು ಒಂದು ಪಠ್ಯವಿಷಯವಾಗಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ ನಿಜಜೀವನಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾದ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುವುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸರಳವಾದ ಭಾಷೆ, ಪದಪುಂಜಗಳು ಮಕ್ಕಳ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ತಾವೇ ಸ್ವತಃ ಗಣಿತ ಸ್ವರೂಪಗಳನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸುತ್ತದೆ. ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಇವು ಮಾಡಿರಿ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಪ್ರಾಕಲ್ಪನೆಗಳಂಥ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಅಧಿಕ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ನೀಡಿ ಮಕ್ಕಳು ಸ್ವತಃ ಕಲಿಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು, ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಲು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

'ಇವು ಮಾಡಿರಿ, ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ' ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೀಡಿರುವ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟರಮಟ್ಟಿಗೆ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಡಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿರುವ ಭಾವನೆಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧರಿತವಾಗಿವೆ. ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ನೈಪುಣ್ಯತೆ, ಭಾವನೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ ಸತ್ಯಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನಿಸುವಿಕೆ ಎಂಬ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚರ್ಚಿಸು ಆಲೋಚಿಸು ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೊಸ ಹೊಸ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ಸ್ವಂತ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವರು.

10 ನೇ ತರಗತಿ ಸಿಲಬಸ್‌ನ್ನು 14 ಅಧ್ಯಾಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಕೂಲಂಕುಷವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡು, ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಲು, ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ಹಿಡಿತ ಸಾಧಿಸಲು, ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು, ಗಣಿತ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ. ಬಣ್ಣಬಣ್ಣದ ವರ್ಣಚಿತ್ರಗಳು, ಚಿತ್ರಗಳು, ಓದಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಾತ್ರ, ಕಡಿತವಾದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಪುಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಬಗೆಗಿನ ಭಯವನ್ನು ಹೋಗಲಾಡಿಸಿ ಸ್ವ -ಕಲಿಕೆಗಾಗಿ ಪ್ರೇರೇಪಿಸುತ್ತದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -1** : ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅವುಗಳ ದಶಾಂಶ ರೂಪದ ವಿಸ್ತರಣೆ, ಆವರ್ತಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಸವಿವರವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಈ ಪಠ್ಯಾಂಶದಲ್ಲಿ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಸಿದ್ದೇವೆ. ಲಘುಗಣಕಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಂತಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ವಿವರಸಿಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -2**: ಗಣಗಳು, ಪ್ರೌಢ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಅಧ್ಯಾಯವಾಗಿದೆ ಹಳೆಯ ಸಿಲಬಸ್‌ನ್ನು 8ನೇ ತರಗತಿಯಿಂದ 'ಗಣಗಳು' ಅಧ್ಯಾಯ ಇದ್ದರೂ,ಹೊಸ ಶಿಕ್ಷಣ ಪ್ರಣಾಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ 10ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಗಣ, ಗಣದ ವಿಧಗಳು, ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು, ಗಣ-ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಗಣಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -3** : ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೆಂದರೇನು? ಮತ್ತು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪರಿಮಾಣ ಅಥವಾ ಗರಿಷ್ಟಘಾತ, ಅವಕಾಶಗಳ ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು, ಮತ್ತು ವರ್ಗಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸುವುದು. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿನ ಚರಕ್ಷರ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳ ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -4** : ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯೊಂದಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು. ಗ್ರಾಫ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಚರರಾಶಿಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -5**: ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು, ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಭಾವನೆ. ಅರ್ಥ, ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪರಾವಲಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -6** : ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಾರಿ ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅಂಕಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, nನೇ ಪದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -7 :** ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ, ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ, ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ (Section formula), ತ್ರಿಬುಜ ಕೇಂದ್ರಭ್ಯಾಸ, ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರಾನ್ ಸೂತ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರನ್ನು (Slope) ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -8 :** ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಬೇಕಾದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಪ್ರೇರಣೆ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಷವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -9 :** ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಛೇಧನ ರೇಖೆಗಳ ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಛೇಧನ ರೇಖೆಯಿಂದಾಗಿ ಏರ್ಪಟ್ಟ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -10 :** ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಘನಾಕಾರ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮೂಹದ ಮೇಲ್ಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲಗಳ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -11 ಮತ್ತು 12 :** ಪ್ರೌಢ ಹಂತದಲ್ಲಿ ನೂತನವಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎತ್ತರ, ದೂರ, ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -13 :** ಸಂಭವನೀಯತೆ 9 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಪುಷ್ಟಿಗೊಳಿಸುತ್ತಾ ನೂತನ ಪದ ವಿವರಣೆಗಳಿಂದ ಅದರ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

**ಅಧ್ಯಾಯ -14 :** ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶ ಶೇಖರಣೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸುವುದು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಅದೇ ವಿಧವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. **'ಗಣಿತ ನಮೂನೆ ವಿಧಾನಗಳು - ಪದ್ದತಿಗಳು'** ಅಧ್ಯಯನದ ಮೂಲಕ ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆಗೆ ಬೇಕಾದ ವಿವಿಧ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ಅವಕಾಶ ಒದಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿಜಜೀವನದ ಸಂಘಟನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ಮಾದರಿ ರೂಪಿಸಬಲ್ಲರು.

ಯಾವ ಪಠ್ಯವಿಷಯದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ವಿಜಯಸಾಧನೆ ಎಂಬುದು ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಅವಲಂಬಿಸುವ ಬೋಧನಾ ಪದ್ದತಿಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಉತ್ತಮ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಮಾತ್ರವೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಲಾಗದು. ತರಗತಿ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿನ ಉತ್ತಮ ಬೋಧನೆ ಮಾತ್ರವೇ ಪಠ್ಯಪ್ರಣಾಳಿಕೆಗೆ ನೂತನ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡಿ ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ತರಬಲ್ಲದಾಗಿದೆ. ಆದರಿಂದ ಗಣಿತ ಬೋಧನೆ ಎಂದರೆ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದೇ ಅಲ್ಲದೇ ಮೌಲಿಕ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಸಾಧನೆಯ ನೈಪುಣ್ಯಗಳು ಬೆಳೆಯುತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಇಂಥ ಬದಲಾವಣೆ ಗಣಿತ ಬೋಧನಾ - ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಬರಬೇಕೆಂದು ಆಶಿಸೋಣ.

ಪ್ರತಿ ಪಠ್ಯಾಂಶವು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ, ಸ್ವತಃ ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವ ಮೂಲಕ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಪರಿಪುಷ್ಟಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲರೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಆನಂದದಿಂದ ಕಲಿಯಲು ಅವರ ಜೀವನಾನುಭವಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಲು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಮೌಲಿಕ ಭಾವನೆಗಳು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತವೆಂದು ಪ್ರಬಲವಾಗಿ ನಂಬುತ್ತೇವೆ.

**"ಸಂತೋಷದಾಯವಾದ ಬೋಧನೆಗೆ ಆರಂಭಿಸುವ ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲರಿಗೂ ಶುಭಾಷಯಗಳು "**

# ಸಿಲಬಸ್

## I. ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯವಸ್ಥೆ (23 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

**(i) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (15 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ಭಾಗಲಬ್ಧ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು
- ಅಂಕಗಣಿತ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ –ಹೇಳಿಕೆಗಳು
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ಮೊದಲಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಾಧನೆಗಳು ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು. (ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳು)
- ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶಗಳು ( ಪೂರ್ವ ಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧನೆಗಳು)
- ಲಘುಗಣಕಗಳ ಪರಿಚಯ
- ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಿಂದ ಲಘುಗಣಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾವಣೆ
- ಲಘುಗಣಕಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$
- ಲಘುಗಣಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

  $\log xy = \log x + \log y;\quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y;\qquad \log x^n = n \log x$
- ಲಘಗಣಕಗಳಿಗೆ ಆದರ್ಶ ಆಧಾರಗಳು, ಲಘಗಣಕಗಳ ನಿತ್ಯ ಜೀವನ ಅನ್ವಯಿಕೆಗಳು (ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಉದ್ದೇಶಿಸಿದವು)

**(ii) ಗಣಗಳು (8 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ರೂಪಗಳು
- ಶೂನ್ಯ ಗಣ, ಪರಿಮಿತ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳು , ವಿಶ್ವಗಣ
- ಸಮ ಗಣಗಳು, ಉಪಗಣ, ಮೂಲಾಂಕ (ಕಾರ್ಡಿನಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ ), ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು
- ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳ ಮೂಲಕ ಗಣಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವುದು
- ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು – ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ ಮತ್ತು ಗಣಗಳ ಛೇಧನ
- ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು, ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

## II. ಬೀಜಗಣಿತ (46 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

**(i) ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು (46 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು
- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಭಾವನೆಗಳು, ರೇಖಾತ್ಮಕ. ವರ್ಗಾತ್ಮಕ, ಘನಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳು
- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಗೆ, ಶೂನ್ಯತೆಗಳಿಗೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ
- ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮ ( ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಸಹಗುಣಕ ಗಳಿಗಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಾಧನೆ)

**(ii) ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು (15 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ನಿತ್ಯ ಜೀವನ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಮೂಲಕ ರಡು ಚದರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರನ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು
- ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ವ್ಯವಸ್ಥೀಕತಣ ಗೊಳಿಸಿದ ಸಂಧರ್ಭಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು.
- ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕತಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಪದ್ದತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು – ಆದೇಶ ಪದ್ದತಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ಪದ್ದತಿ
- ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸುವ ನಿತ್ಯ ಜೀವನ ಸಂದರ್ಭಗಳು, ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಯಾರುಮಾಡಿ, ಬಿಡಿಸುವುದು.

**(iii) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು (12 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಆದರ್ಶ ರೂಪ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$
- ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು

– ಅಪವರ್ತನ ಪದ್ಧತಿ –ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡುವ ಪದ್ಧತಿ ( ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಶೋಧಕ ಮೂಲಕ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡು ಸಂಬಂಧಗಳು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು
- ನಿತ್ಯಜೀವನ ಸಂಘಟನೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

(iv) **ಶ್ರೇಢಿಗಳು (11 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನೆ (A.P)
- ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ n ನೇ ಪದ, ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (G.P.)
- ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ n ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

## II. ರೇಖಾ ಗಣಿತ (46 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

(i) **ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (11 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ಸಮರೂಪ ಚಿತ್ರಗಳು, ಸರ್ವಸಮತೆಗೂ ಸರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.
- ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು
- (ಸಾಧನೆ ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿದರೆ, ಆ ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ, ಮೂರನೆ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.
- (ಪ್ರೇರಣೆ ) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮವಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳು (ಕೋ. ಕೋ. ಕೋ).
- (ಪ್ರೇರಣೆ ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು . ಎರಡನೆ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು.(ಬಾ. ಬಾ. ಬಾ)
- (ಪ್ರೇರಣೆ ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕೋನ, ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ .ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು (ಬಾ.ಕೋ ಬಾ)
- (ಸಾಧನೆ ) ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ
- (ಪ್ರೇರಣೆ ) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿದ ಶೃಂಗದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಲಂಬಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಏರ್ಪಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪಗಳು ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮರೂಪಿಗಳು.
- (ಸಾಧನೆ ) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು, ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.
- (ಸಾಧನೆ ) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ,ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು, ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೆ , ಮೊದಲನೆ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ಮತ್ತು ಆ ತ್ರಿಭುಜ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.
- (ರಚನೆ ) ದತ್ತ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬೇಕಾದ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.(ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ)
- (ರಚನೆ ) ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರಮಾಣದ ಪ್ರಕಾರ ಸಮರೂಪಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

(ii) **ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಛೇಧನ ರೇಖೆಗಳು (15 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)**

- ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೂ ಮತ್ತು ಛೇಧನ ರೇಖೆಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ
- ಛೇಧನ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಸಂದರ್ಭಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು.
- (ಸಾಧನೆ ) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಆ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುತ್ತದೆ.
- (ಸಾಧನೆ ) ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಉದ್ದಗಳು ಸಮ.
- (ರಚನೆ ) ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ , ಆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.
- ಛೇಧನ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ವೃತ್ತಖಂಡ
- ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಲಘು ವೃತ್ತಖಂಡ, ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡ)

## IV. ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಜ್ಯಾಮಿತಿ (12 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

- ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಮೂಲಕ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು.
- ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ನಡುವಿನ ದೂರ
$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$$
- ದತ್ತ ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನು ಬೇಕಾದ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಅಂತರಿಕ ಅನುಪಾತ m : n).
- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಏರ್ಪಡುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಇಳಿಜಾರು.

## V. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ (23 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

### (i) ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ (15 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

- ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಲಘುಕೋನಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳು ಅಂದರೆ sine, cosine, tangent, cosecant, secant and cotangent.
- $30^\circ$, $45^\circ$ ಮತ್ತು $60^\circ$ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಸಾಧನೆಗಳೊಂದಿಗೆ).
- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅನುಪಾತಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ – ಪೂರಕ ಕೋನಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅನುಪಾತಗಳು.
- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು.
  (i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, (ii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, (iii) $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$

### (ii) ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ – ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಿಕೆಗಳು (8 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

- ಉನ್ನತ ಕೋನ, ಅವನತ ಕೋನ
- ಎತ್ತರಗಳು – ದೂರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿತ್ಯ ಜೀವನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು
- ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನಗಳಿಗೆ ಮೀರದಯೇ, ಉನ್ನತ ಮತ್ತು ಅವನತ ಕೋನಗಳು $30^\circ$, $45^\circ$ ಮತ್ತು $60^\circ$ ಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಬರೆವಣಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

## VI. ಕ್ಷೇತ್ರ ಗಣಿತ (10 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

### (i) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು

- ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಒಟ್ಟುಗೂಡುವುದರಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. (ಅಂದರೆ ಘನ, ಆಯತ ಘನ. ನೇರ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ, ನೇರ ಶಂಕಾಕೃತಿ, ಗೋಳ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಗೋಳ ಗಳಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡರಿಂದ ಏರ್ಪಡುವವು)
- ಎರಡು ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಡುವ ಲೋಹದ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿದಾಗ ಏರ್ಪಡುವ ಹೊಸ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

## VII. ದತ್ತಾಂಶ ನಿರ್ವಹಣೆ (25 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

### (i) ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (15 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

- ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ , ಬಹುಳಕಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ (ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗೆ)
- ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಳಕಗಳ ಭಾವನೆಗಳು.
- ವರ್ಗೀಕೃತ / ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ , ಬಹುಳಕಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
- ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು

### (ii) ಸಂಭವನೀಯತೆ (10 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

- ಸಂಭವನೀಯತೆ ಭಾವನೆ, ವ್ಯಾಖ್ಯಾನೆಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ
- ನಿತ್ಯಜೀವನ ಸಂಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ( ಏಕ ಸಂಘಟನೆಗಳನ್ನು ಗಣಗಳ ಭಾವನೆಯೊಂದಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು.
- ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭಾವನೆಗಳು

## ಅನುಬಂಧ

### ಗಣಿತ ಮಾದರಿಗಳು – ಪದ್ಧತಿಗಳು(8 ಪೀರಿಯಡ್‌ಗಳು)

- ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಮೂನೆ ವಿಧಾನಗಳ ಭಾವನೆ
- ನಿತ್ಯ ಜೀವನ ಸಂಘಟನೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಗಣಿತ ನಮೂನೆಗಳ ರೂಪಕಲ್ಪನೆ
  (ಉದಾ: ಸರಳಬಡ್ಡಿ, ವಾಯಿದೆ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಲ್ಲಿಸುವುದು ಮೊದಲಾದವು)

# ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

**ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು** : ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಬೇಕು,ಏನನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕೋ, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಆ ತರಗತಿಯ **"ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು"** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಣತದಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳ (Contents) ಮೂಲಕ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

1. **ಸಮಸ್ಯ ಸಾಧನೆ :** ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳು, ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ ಗಣಿತ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು.

**(a) ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಧಗಳು**

ಪಜಿಲ್ಸ್, ಪದಬಂಧ ಲೆಕ್ಕಗಳು, ಚಿತ್ರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು, ದತ್ತಾಂಶ ಆವಗಾಹನೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ –ಕೋಷ್ಟಕಗಳು – ಗ್ರಾಫ್ ಪದ್ದತಿ ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡುವ ಮೊದಲಾದ ವಿಧವಿಧಗಳಾಗಿ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

**(b) ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆ - ಹಂತಗಳು**

- ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಓದುವುದು.
- ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸುವುದು.
- ಅನುಬಂಧ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಪದ್ದತಿ ಪ್ರಕಾರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು.

**(c) ಸಂಕ್ಲಿಷ್ಟತೆ**

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಂಕ್ಲಿಷ್ಟತೆ ಎನ್ನುವುದು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರ ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

- ಅನು ಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು ( ಇದು ಅನು ಸಂಧಾನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ)
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಂತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
- ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
- ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧನೆಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂದರ್ಭ ಸಮಾಚಾರ ಎಷ್ಟರ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಇದೆ ?
- ಸಮಸ್ಯೆ ಸಾಧಿಸುವ ಪದ್ದತಿ ಸಹಜತ್ವ

2. **ತಾರ್ಕಿಕತೆ - ಋಜು**

- ನಾನಾ ವಿಧದ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

- ಗಣಿತ ಸಾಮನ್ಯೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಊಹಾತ್ಮಕಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ರಚನೆ ಮಾಡುವುದು
- ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸರಿನೋಡುವುದು.
- ತಾರ್ಕಿಕ ಚರ್ಚೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಸಮಸ್ಯೆ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು.
- ಅನುಗಮನ, ನಿಗಮನ ಪದ್ದತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ವಿನಿಯೋಗಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.

**5.ತಾರ್ಕಿಕತೆ - ಋಜು**

- ಗಣಿತ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು, ವ್ಯಾಕಗಳನ್ನು ಓದುವುದು - ಬರೆಯುವುದು ,
  ಉದಾ: $3 + 4 = 7,\ 3 < 5,\ n_1+n_2= n_2+n_1,$ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $= 180^0$
- ಗಣಿತ ಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು.
- ಗಣಿತ ಪರವಾದ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಂತ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು : ಉದಾ: ಚೌಕ ಎನ್ನುವುದು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಕೋನಗಳಿರುವ ಸಂವೃತ ಚಿತ್ರ.
- ಪದ್ದತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು ಉದಾ : ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ನಂತರ ಹತ್ತಿರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳ್ನು ಕೂಡುವುದು/ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗುರ್ತು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ
- ಗಣಿತ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.

**4.ಸಂಬಂಧ / ಅನುಸಂಧಾನ**

- ಅನುಬಂಧ ಗಣಿತ, ಪಾಠ್ಯ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು - ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು . ಉದಾ : ಗುಣಾಕಾರ, ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ, ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿನ ಭಾಗಕ್ಕೆ - ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ -ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ, ವಿನ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ - ಸಮಮಿತಿಗಳಿಗೆ ; ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ / ಅಂತರಾಳ.
- ದೈನಂದಿನ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು.
- ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು.
- ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಾಠ್ಯಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಅನು ಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು. ಉದಾ : ದತ್ತಾಂಶದ ಶೇಖರಣೆ ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತ ; ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರದೇಶ.
- ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಬಹುಳ ಪದ್ದತಿಗಳನ್ನು ಅನುಸಂಧಾನ ಮಾಡುವುದು .

**5.ದೃಶ್ಯೀಕರಣ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿನಿಧಿತ್ವ**

- ಪಟ್ಟಿಕೆಯಲ್ಲಿನ ಸಮಾಚಾರ, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ, ರೇಖಾ ಚಿತ್ರ, ಆಯತ ಚಿತ್ರ, 2-Dಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು 3-D ಆಕೃತಿಗಳು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಓದುವುದು.
- ಪಟ್ಟಿಕೆಗಳನ್ನು ರೂಪೊಂದಿಸುವುದು, ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವುದು. ರೇಖಾ ಚಿತ್ರಗಳು,, ಆಯತಚಿತ್ರಗಳನ್ನು, ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.
- ಗಣಿತದ ಚಿತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಚಿಹ್ನೆಗಳು